
Programme de colles de la semaine n°18

1 Consignes

Nous continuons l'étude des nombres réels et des suites réelles. Vous devez savoir établir des inégalités, étudier des expressions faisant apparaître des parties entières, calculer des bornes supérieures et inférieures... Concernant les suites, vous devez savoir établir la convergence ou la divergence d'une suite.

Il s'ajoute cette semaine l'étude des suites définies par récurrence, les comparaisons de suites et les suites à valeurs complexes.

Enfin, vous devez savoir calculer l'expression du terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

N.B. : La connaissance des propriétés des suites arithmétiques et géométrique est bien entendu un prérequis.

2 Plan du cours

Le programme de cette semaine s'ajoute à celui de la semaine précédente.

Analyse-chapitre 5 : Nombres réels - Suites de nombres réels

III Étude d'une suite définie par récurrence

$$(u_{n+1} = f(u_n))$$

III-1 Définitions et premières propriétés.

III-1-a) Points fixes - Intervalles stables.

(Définitions, existence d'une suite définie par récurrence à l'aide de la notion d'intervalle stable, caractérisation de la limite d'une suite définie par récurrence (point fixe))

III-1-b) Monotonie.

(Lien entre la monotonie de f et de (u_n))

III-1-c) Inégalités des accroissements finis.

(Énoncé de l'inégalité des accroissements finis)

III-2 Un premier exemple.

$$(u_{n+1} = \sqrt{2u_n})$$

III-3 Approximation de $\sqrt{3}$.

$$(u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{3}{u_n} \right))$$

IV- Comparaisons de suites

IV-1 Définitions

(suites négligeables, dominées et équivalentes, caractérisation fondamentale)

IV-2 Propriétés fondamentales

(transitivité, propriétés additives avec toutes les précautions nécessaires, propriétés multiplicatives..)

IV-3 Suites usuelles

(Si $0 < a < 1$, $\alpha < 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha' > 0$ et $b > 1$, alors $a^n \ll n^\alpha \ll \ln(n)^\beta \ll n^{\alpha'} \ll b^n \ll n! \ll n^n$)

IV-4 Développements asymptotiques

(définition, lien avec les développements limités...)

V- Brève extension aux suites complexes

V-1 Définitions

(parties réelles et imaginaire, conjugué et modules d'une suite complexe, suites bornées, suite convergente)

V-2 Propriétés

(lien avec les parties réelle et imaginaire, opérations sur la limite, lien avec la forme trigonométrique...)

3 Démonstrations

1. $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

N.B. : La méthode vue en cours utilise une division euclidienne.

2. Unicité de la limite d'une suite.

3. Convergence et limite de la somme de deux suites convergentes.

4. Une suite croissante converge si, et seulement si, elle est majorée.

4 Exercices traités en cours

Feuille n°12 : Exercice 1, Exercice 2, Exercice 6, Exercice 9, Exercice 12 (8,10,11,12), Exercice 13, Exercice 16, Exercice 19, Exercice 20(1), Exercice 22(1,5), Exercice 23, Exercice 27, Exercice 28, Exercice 29, Exercice 34, Exercice 37, Exercice 38, Exercice 40