
Programme de colles de la semaine n°19

1 Consignes

Nous continuons l'étude des suites réelles. Vous devez savoir établir la convergence ou la divergence d'une suite. On se concentrera plus particulièrement sur l'étude des suites définies par récurrence, les comparaisons de suites et les suites à valeurs complexes.

Vous devez également savoir calculer l'expression du terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

N.B. : La connaissance des propriétés des suites arithmétiques et géométrique est bien entendu un prérequis.

Nous ajoutons cette semaine l'étude des polynômes. Il faut connaître et maîtriser les manipulations classiques concernant les polynômes : division euclidienne, divisibilité, dérivée, dérivées $n^{\text{ème}}$ (formule de Leibnitz), factorisation, racines, multiplicité d'une racine, relations coefficients-racines, factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$...

2 Plan du cours

Le programme de cette semaine s'ajoute à celui de la semaine précédente.

Algèbre Chapitre 7 : Polynômes

$\mathbb{K}[X]$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. **I- Anneau des polynômes**

I-1 Définition et opérations

(définition de $\mathbb{K}[X]$, sommes et produits de polynômes, termes constants...)

I-2 Degré d'un polynôme

(définition du degré, coefficients et termes dominants, polynôme unitaire, degré d'une somme, d'un produit, éléments inversible de $\mathbb{K}[X]$...)

I-3 Un peu d'arithmétique des polynômes

I-3-a) Division euclidienne

(Définition, existence et unicité, algorithme de la division euclidienne)

I-3-b) Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

(définition : $P|Q$, diviseur, multiple, ..., propriétés élémentaires, polynôme associé)

I-3-c) Irréductibilité

(définition, existence d'un diviseur irréductible, factorisation en un produit de polynômes irréductibles)

I-4 Dérivation

(Définition formelle, dérivée d'une somme, d'un produit, dérivée $n^{\text{ème}}$, dérivée $n^{\text{ème}}$ de X^m , dérivée $n^{\text{ème}}$ d'une somme, formule de Leibnitz, degré de la dérivée $n^{\text{ème}}$)

II- Fonctions polynomiales

II-1 Définition et premières propriétés

(Définition...)

II-2 Racines d'un polynôme

(définition, reste de la division de P par $X - a$, a est une racine de P si et seulement si $X - a|P$, généralisation au cas d'un nombre fini de racines, lien entre le nombre de racines et le degré d'un polynôme non nul)

II-3 Multiplicité d'une racine

(définition, caractérisation à l'aide des dérivées successives, lien entre le nombre de racines comptées avec multiplicité et le degré)

II-4 Relations coefficients-racines

(définition d'un polynôme scindé, caractérisation, définition des fonctions symétriques élémentaires, théorème des relations entre coefficients et racines)

III- Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$

III-1 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

(Théorème de d'Alembert-Gauss, tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé, polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$)

A revoir : factorisation de $X^n - Y^n$, $X^n - re^{i\theta}$...

III-2 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

(image du conjugué, multiplicité du conjugué d'une racine, factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$)

3 Démonstrations

1. Une suite croissante converge si, et seulement si, elle est majorée.
2. Unicité du quotient et du reste d'une division euclidienne de polynôme.
3. Formule de Leibnitz
4. a est une racine de P si, et seulement si, $X - a \mid P$.
5. a est une racine de multiplicité m si, et seulement si, $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.

4 Exercices traités en cours

Feuille n°12 : Exercice 1, Exercice 2, Exercice 6, Exercice 9, Exercice 12 (8,10,11,12), Exercice 13, Exercice 16, Exercice 19, Exercice 20(1), Exercice 22(1,5), Exercice 23, Exercice 27, Exercice 28, Exercice 29, Exercice 34, Exercice 37, Exercice 38, Exercice 40

Feuille n°13 : Exercice 1(1), Exercice 2, Exercice 6, Exercice 7, Exercice 12 (1), Exercice 16 (1), Exercice 21, Exercice 23, Exercice 24 (1,3)