

1 Consignes

Nous continuons cette semaine l'étude des polynômes. Il faut connaître et maîtriser les manipulations classiques concernant les polynômes : division euclidienne, divisibilité, dérivée, dérivées $n^{\text{ème}}$ (formule de Leibnitz), factorisation, racines, multiplicité d'une racine, relations coefficients-racines, factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$... Nous ajoutons cette semaine l'étude des fonctions d'une variable réelle. Il s'ajoute cette semaine les fonctions d'une variable réelle. Vous devez savoir établir et exploiter les propriétés usuelles des fonctions. En particulier, vous serez amené à étudier les limites d'une fonction.

2 Plan du cours

Le programme de cette semaine s'ajoute à celui de la semaine précédente.

Analyse Chapitre 7 : Fonctions d'une variable réelle

I- Généralités

I-1 Définitions

(fonctions, domaine de définition)

I-2 Opérations

(somme, produit, inverse, composition de fonctions...)

I-3 Relation d'ordre

(définition de $f \leq g$, $\inf(f, g)$, $\sup(f, g)$)

I-4 Fonctions majorées, minorées ou bornées.

(définitions, $\sup_D(f)$, $\inf_D(f)$, $\max_D(f)$, $\min_D(f)$, maximum, minimum, extremum locaux)

I-5 Monotonie

(définitions, composée, sommes de fonctions monotones, produits de fonctions croissantes et positives)

I-6 Parité

(ensemble symétrique, définition, somme, produit, inverse de fonctions paires ou impaires, parties paire et impaire d'une fonction...)

I-7 Fonctions périodiques

(définition, $f(x + nT) = f(x)$, somme, produit, inverse de fonctions périodiques,...)

II- Limite d'une fonction

II-1 Limite finie

II-1-a) Définition

(définition, unicité de la limite, limite à droite, à gauche,...)

II-1-b) Premières propriétés - Inégalités.

(si f admet une limite en a , alors f est bornée au voisinage de a ; si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) > 0$, alors f est strictement positif au voisinage de a , conservation des inégalités larges par passage à la limite, théorème des gendarmes,...)

II-1-c) Opérations sur les limites

(somme, produit, inverse, composition des limites,...)

II-1-d) Limites finies et suites

(si $u_n \rightarrow a$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, alors $f(u_n) \rightarrow l$, caractérisation séquentielle des limites)

II-2 Limites infinies

II-2-a) Définition

(définition...)

II-2-b) Premières propriétés - Inégalités

(si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors f est minorée au voisinage de a ; si $f \leq g$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$...)

II-2-c) Opérations sur les limites infinies

(somme, produit, inverse, composition des limites,...)

II-2-d) Limites infinies et suites

(si $u_n \rightarrow a$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, alors $f(u_n) \rightarrow l$, caractérisation séquentielle des limites)

3 Démonstrations

1. Formule de Leibnitz
2. a est une racine de P si, et seulement si, $X - a|P$.
3. a est une racine de multiplicité m si, et seulement si, $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.
4. Limite d'un produit de fonctions.
5. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $a \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$.

4 Exercices traités en cours

Feuille n°13 : Exercice 1(1), Exercice 2, Exercice 6, Exercice 7, Exercice 12 (1), Exercice 16 (1), Exercice 17(2), Exercice 18, Exercice 23, Exercice 24 (1,3)

Feuille n°14 : Exercice 1(1,2,3), Exercice 3, Exercice 10 (1,2,4,8), Exercice 11 (3)