Programme de colles de la semaine n°24

1 Consignes

Nous continuons l'algèbre linéaire. Vous devez connaître les définitions et les premières propriétés des espaces vectoriels et des sous-espaces vectoriels. Il faut savoir établir si un sous-ensemble d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel. Pour cela, il est essentiel de connaître les principaux exemples d'espaces vectoriels. Vous devez savoir manipuler les notions de sous-espaces vectoriels engendrés, de somme de sous-espaces vectoriels, de sous-espaces supplémentaires...
Nous ajoutons cette semaine les applications linéaires. Vous devez savoir établir qu'une application est linéaire ou non, calculer le cas échéant son noyau et son image.
Vous devez également savoir calculer une projection ou une symétrie, établir qu'une application linéaire est une projection ou une symétrie et en préciser les caractéristiques.

Rappel : Vous devez être capable de répondre à toutes questions portant sur le cours.

2 Plan du cours

Le programme de cette semaine s'ajoute à celui de la semaine précédente.
Algèbre chapitre 9 : Algèbre linéaire - Applications linéaires
I Définitions
(définition, caractérisations, exemples)
II Opérations
II.1 Structure d'espace vectoriel
($\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$)
II.2 Composition
(compatibilité entre les lois $+$, $.$ et $\circ$ dans $\mathcal{L}(E,F)$, structure d'anneau de $\mathcal{L}(E,F)$)
II.3 Linéarité et bijectivité
(la réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire, définition du groupe $GL(E)$)
III Noyau et image d'une application linéaire
III.1 Noyau d'une application linéaire
(définition, structure de sous-espace vectoriel, caractérisation de l'injectivité, exemples)
III.2 Image d'une application linéaire
(définition, structure de sous-espace vectoriel, caractérisation de la surjectivité, exemples)
III.3 Équations linéaires
(définition, structure de l'ensemble des solutions, principe de superposition)
IV Applications linéaires particulières IV.1 Applications linéaires définies sur $\mathbb{K}^n$
(description des applications linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans un espace vectoriel)
IV.2 Projections - Projecteurs
(définition d'une projection, propriétés usuelles, définition d'un projecteur, un projecteur est une projection)
IV.3 Symétrie
(définition d'une symétrie, propriétés usuelles, définition d'une involution, une involution est une symétrie)
IV.4 Affinités
(définition)

Remarque : Vous trouverez le contenu de ce chapitre sur le site.

3 Démonstrations

1. Détermination d'une famille génératrice de $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ 3x+2y+z=0 \right\}$ (Exemple II.5 n°9 alg-chap 8).
2. $\mathbb{R}^2 = \text{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \oplus \text{vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (Exemple II.7 n°2 alg-chap 8).

3. L'application $\varphi \; : \; \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(0), P(1), P(2)\big) \end{array} \right.$ est un isomorphisme (Exemple II.1 n°2 alg-chap 9).
   La linéarité de φ n'a pas été établie en cours. Elle pourra cependant être exigée.
4. Soit $f \; : \; \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \\ x+y+z \end{pmatrix} \end{array} \right.$
   Détermination de $\ker(f)$ (Exemple III.1 n°2 alg-chap 9).
5. $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel (Proposition III.3 alg-chap 9).
6. Un projecteur p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$ (Proposition IV.4 alg-chap 9).

4 Exercices traités en cours

Feuille n°16 : Exercice 1 (1,3,4,6,9,11), Exercice 2, Exercice 5 (2,6), Exercice 7, Exercice 8, Exercice 9 (2), Exercice 12, Exercice 15, Exercice 16 (1,3,4)
Feuille n°17 : Exercice 1 (2,5), Exercice 2 (2), Exercice 7, Exercice 10, Exercice 11, Exercice 17, Exercice 23, Exercice 27