1 Consignes

Nous continuons l'algèbre linéaire. Vous devez connaître les définitions et les premières propriétés des espaces vectoriels et des sous-espaces vectoriels. Il faut savoir établir si un sous-ensemble d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel. Pour cela, il est essentiel de connaître les principaux exemples d'espaces vectoriels. Vous devez savoir manipuler les notions de sous-espaces vectoriels engendrés, de somme de sous-espaces vectoriels, de sous-espaces supplémentaires...

Vous devez savoir établir qu'une application est linéaire ou non, calculer le cas échéant son noyau et son image. Vous devez également savoir calculer une projection ou une symétrie, établir qu'une application linéaire est une projection ou une symétrie et en préciser les caractéristiques.

Nous ajoutons cette semaine les notions de familles génératrices, libres, liées et les bases. Vous devez connaître les définitions de ces notions. En particulier, vous devez savoir déterminer une base d'un espace vectoriel et d'un sous-espace vectoriel.

Nous ajoutons enfin la notion de dimension d'un espace vectoriel. Vous devez connaître les propriétés élémentaires de la notion de dimension.

Rappel : Vous devez être capable de répondre à toutes questions portant sur le cours.

2 Plan du cours

Le programme de cette semaine s'ajoute à celui de la semaine précédente.

Algèbre chapitre 10 : Algèbre linéaire - Familles de vecteurs - Dimension

I Familles de vecteurs

I.1 Familles génératrices

(définition, sur-famille d'une famille génératrice, famille engendrant une famille génératrice)

I.2 Famille libre - Famille liée

(définition, une famille est liée si, et seulement si, un de ses vecteurs est une combinaison linéaire des autres, sous-famille d'une famille libre)

I.3 Bases d'un espace vectoriel

(définition, base canonique de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}_n[X]$, I.4 Morphismes et familles de vecteurs

(image d'une famille de vecteurs, lien entre les familles libres et génératrices et les applications linéaires surjectives ou injectives, caractérisation de la surjectivité et de l'injectivité)

II Espaces vectoriels de dimensions finies

II.1 Définition

(un espace vectoriel de dimension finie est un espace vectoriel engendré par une famille finie, exemples et contre-exemples)

II.2 Bases d'un espace vectoriel de dimension finie

(théorème de la base incomplète, existence d'une base)

III Dimension

III.1 Définition (une famille de $n + 1$ vecteurs engendrée par n vecteurs est liée, définition de la dimension, famille libre ou génératrice d'un espace vectoriel de dimension finie) III.2 Isomorphisme

(deux espaces vectoriels on même dimension si, et seulement si, ils sont isomorphes)

III.3 Produit de deux espaces vectoriels

(base d'un produit de deux espaces vectoriels, dimension d'un produit d'espace vectoriel)

IV Dimension d'un sous-espace vectoriel

IV.1 Premières propriétés

(dimension d'un sous-espace vectoriel)

IV.2 Rang d'une famille de vecteurs

(définition, règle de calcul)

IV.3 Somme de sous-espaces vectoriels

(dimension de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires, formule de Grassmann, caractérisation de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires)

V Applications linéaires en dimension finie

V.1 Théorème du rang

(énoncé, application à l'étude des hyperplans d'un espace vectoriel de dimension finie)

V.2 Rang d'une application linéaire

(définition, lien avec le rang de l'image d'une base)

V.3 Isomorphismes

(caractérisation d'un isomorphisme et d'un automorphisme en dimension finie)

V.4 Composition

(rang d'une composée d'application linéaire)

Remarque : Vous trouverez le contenu de ce chapitre sur le site.

3 Démonstrations

1. L'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto (P(0), P(1), P(2)) \end{cases}$ est un isomorphisme (Exemple II.1 n°2 alg-chap 9).

La linéarité de φ n'a pas été établie en cours. Elle pourra cependant être exigée.

2. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \\ x+y+z \end{pmatrix} \end{cases}$

Détermination de $\ker(f)$ (Exemple III.1 n°2 alg-chap 9).

3. $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel (Proposition III.3 alg-chap 9).
4. Un projecteur p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$ (Proposition IV.4 alg-chap 9).
5. Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto (P(1), P(2)) \end{cases}$

Détermination d'une base de $\ker(\varphi)$. (Exemple I.9 alg-chap 10)

6. Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto \begin{pmatrix} x+y+2z \\ 2x+y+3z \\ 3x+2y+5z \end{pmatrix} \end{cases}$

Détermination d'une base de $\text{Im}(\varphi)$. (Exemple I.10 alg-chap 10)

7. Théorème du rang. (Théorème V.1 avec le lemme V.1)

4 Exercices traités en cours

Feuille n°16 : Exercice 1 (1,3,4,6,9,11), Exercice 2, Exercice 5 (2,6), Exercice 7, Exercice 8, Exercice 9 (2), Exercice 12, Exercice 15, Exercice 16 (1,3,4)

Feuille n°17 : Exercice 1 (2,5), Exercice 2 (2), Exercice 7, Exercice 10, Exercice 11, Exercice 17, Exercice 23, Exercice 27