Programme de colles de la semaine n°26

1 Consignes

Nous continuons l'algèbre linéaire. Vous devez connaître les définitions et les premières propriétés des espaces vectoriels et des sous-espaces vectoriels. Il faut savoir établir si un sous-ensemble d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel. Pour cela, il est essentiel de connaître les principaux exemples d'espaces vectoriels. Vous devez savoir manipuler les notions de sous-espaces vectoriels engendrés, de somme de sous-espaces vectoriels, de sous-espaces supplémentaires...
Vous devez savoir établir qu'une application est linéaire ou non, calculer le cas échéant son noyau et son image. Vous devez également savoir calculer une projection ou une symétrie, établir qu'une application linéaire est une projection ou une symétrie et en préciser les caractéristiques.
Vous devez également connaître les notions de familles génératrices, libres, liées et les bases. Vous devez connaître les définitions de ces notions. En particulier, vous devez savoir déterminer une base d'un espace vectoriel et d'un sous-espace vectoriel.
En algèbre linéaire, vous devez enfin connaître la notion de dimension d'un espace vectoriel. Vous devez connaitre les propriétés élémentaires de la notion de dimension.
Nous ajoutons de cette semaine le chapitre d'intégration. Vous devez savoir calculer des intégrales de fonctions en utilisant, entre autres, des techniques d'intégration par parties et de changement de variable (aucune règle de calcul type "règle de Bioche", "décomposition en éléments simples" n'est au programme, les changements de variables et les diverses transformations devront être pour l'essentiel proposés par le sujet). Vous devez également savoir calculer la limite de suites en reconnaissant une somme de Riemann. La connaissance du formulaire de primitives (donné lors du chapitre sur les équations différentielles) est indispensable.

Rappel : Vous devez être capable de répondre à toutes questions portant sur le cours.

2 Plan du cours

Le programme de cette semaine s'ajoute à celui de la semaine précédente.
An-chap 8 : Intégration
I- Intégrale d'une fonction continue par morceaux.
I-1 Fonctions continues par morceaux - Fonctions en escalier
(subdivision d'un segment, définition, l'ensemble des fonctions en escalier est un espace vectoriel, $\mathcal{C}_{pm}([a,b])$ est un espace vectoriel,...)
I-2 Intégrale des fonctions continues par morceaux
I-2-a) Définition informelle
(interprétation en termes d'aire, notations : $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, $\displaystyle\int_a^b f$)
I-2-b) Construction
(Une construction par encadrement des fonctions continues par morceaux par les fonctions en escalier a été esquissée.)
I-2-c) Somme de Riemann
(définition des sommes de Riemann, convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale de la fonction (aucun résultat sur la vitesse de convergence des sommes de Riemann n'a été donné)
I-3 Propriétés additives
(linéarité, relation de Chasles,..)
I-4 Inégalités
(positivité, croissance, moyenne d'une fonction, inégalité de la moyenne...)
II- Intégration des fonctions continues
II-1 Intégrale d'une fonction positive
(l'intégrale d'une fonction f positive et continue est nulle si et seulement si f est nulle)
II-2 Inégalité de Cauchy-Schwartz
(énoncé)
II-3 Théorème fondamental de l'analyse.
(énoncé, existence d'une primitive, calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive)
III- Calcul de primitives
III-1 Intégration par parties
(énoncé)

III-2 Changement de variables
(changement de variables affines, changement de variable quelconque)

3 Démonstrations

1. Soit $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & (P(1), P(2)) \end{array} \right.$
   Détermination d'une base de $\ker(\varphi)$. (Exemple I.9 alg-chap 10)
2. Soit $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y+2z \\ 2x+y+3z \\ 3x+2y+5z \end{pmatrix} \end{array} \right.$
   Détermination d'une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$. (Exemple I.10 alg-chap 10)
3. Théorème du rang. (Théorème V.1 avec le lemme V.1)
4. Calcul de la limite de $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
5. Théorème fondamental de l'analyse :
   Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors $(x \mapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t)$ est la primitive de f qui s'annule en a.
6. Calcul de $\int_0^x \frac{\cos(t)}{1+\sin^2(t)}\ \mathrm{d}t$ et de $\int_0^x \sqrt{1-t^2}\ \mathrm{d}t$.

4 Exercices traités en cours

Feuille n°16 : Exercice 1 (1,3,4,6,9,11), Exercice 2, Exercice 5 (2,6), Exercice 7, Exercice 8, Exercice 9 (2), Exercice 12, Exercice 15, Exercice 16 (1,3,4)
Feuille n°17 : Exercice 1 (2,5), Exercice 2 (2), Exercice 7, Exercice 10, Exercice 11, Exercice 17, Exercice 23, Exercice 27
Feuille n°18 : Exercice 1 (2,4,5), Exercice 2, Exercice 5, Exercice 7 (1,3), Exercice 9 (1,2,4,5), Exercice 11 (3), Exercice 12 (2), Exercice 13, Exercice 18, Exercice 20, Exercice 22 (1,3), Exercice 30
Feuille n°19 : Exerice 1 (1,2,4), Exercice 2, Exercice 3 (3,4,5,6,10,15), Exerice 4 (1), Exercice 5(1)