Lycée Gustave Eiffel Année 2011-2012
PTSI 2 28 mai au 1er juin 2012

Programme de colles de la semaine n°29

1 Consignes

Nous continuons les matrices. Vous devez maîtrisez le calcul matriciel : produit et calcul d'inverse en particulier. Vous devez savoir calculer la matrice d'une application linéaire. En particulier, vous devez savoir faire un changement de base.
Nous ajoutons les espacees vectoriels euclidiens. Vous devez savoir établir si une application est un produit scalaire ou non. Vous devez connaître la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Enfin, vous devez savoir calculer une projection ou une symétrie orthogonale.

Rappel : Vous devez être capable de répondre à toutes questions portant sur le cours.

2 Plan du cours

Le programme de cette semaine s'ajoute à celui de la semaine précédente.
Algèbre-Chapitre 12 : Espaces vectoriels euclidiens
I Produit scalaire
I-1 Définition et premiers exemples
(définition, produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a,b])$: $< f, g >= \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$)
I-2 Inégalité de Cauchy-Schwarz
(énoncé)
I-3 Norme euclidienne
I-3-a) Définition
(définition, retraduction de l'inégalité de Cauchy-Schwartz à l'aide de la norme, vecteurs unitaires)
I-3-b) Propriétés
(identités remarquables, $\|u\| = 0 \iff u = 0_E$, $\|\lambda.u\| = |\lambda|.\|u\|$, inégalité triangulaire)
I-3-c) Distance euclidienne
(définition, propriétés usuelles)
I-3-d) Relation avec le produit scalaire
(identités de polarisation, identité du parallélogramme)
I-4 Orthogonalité
I-4-a) Vecteurs orthogonaux
(définition, théorème de Pythagore)
I-4-b) Familles de vecteurs
(famille orthogonale, famille orthonormale, une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre, théorème de Pythagore pour une famille de vecteurs)
I-4-c) Sous-espaces vectoriels
(sous-espaces vectoriels orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel)
II Espaces vectoriels euclidiens
II-1 Définition
(définition d'un espace vectoriel euclidien)
II-2 Bases orthonormales
II-2-a) Définition et premières propriétés
(définition, coordonnées dans une base orthonormale, expression du produit scalaire en fonction des coordonnées dans une base orthonormale, écriture matricielle)
II-2-b) Méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt
(théorème et algorithme de calcul, tout espace euclidien admet une base orthonormale)
II-2-c) Supplémentaire orthogonal
($E = F \oplus F^{\perp}$, théorème de la base orthonormale incomplète, toute forme linéaire est de la forme $u \mapsto (u|u_0)$ où $u_0 \in E$ est unique)
III Projection et symétrie orthogonale
III-1 Projection orthogonale
(définition, le projeté orthogonal sur F d'un vecteur u est la meilleure approximation de u par un vecteur de F, expression à l'aide d'une base orthonormale de F)
III-2 Symétrie orthogonale
(définition, lien avec la projection, conservation de la norme, expression à l'aide d'une base orthonormale de F)

3 Démonstrations

1. Calcul de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (Exemple III-1)
2. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x + y - z \\ x + 2y - z \\ 3x - 3y + 2z \end{pmatrix} \end{array} \right.$. Soit $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.
   Vérifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $M_{\mathcal{B}'}(f)$ à l'aide d'un changement de base. (Exemple IV-4)
3. Calcul de $\mathrm{rg}(A)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. (Exemple IV-5)
4. Calcul de $\det(A)$ où $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}$. (Exemple V-1)
5. Formule de Cramer pour un système d'ordre 2. (Théorème VI-1)
6. Montrer que $(.|.)$ définie pour tout $(f,g) \in (\mathcal{C}[a,b])^2$ où $a < b$ par $(f,g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}[a,b]$.
7. Application de la méthode de Gram-Schmidt à la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ et en déduire l'expression de la projection sur vect $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

4 Exercices traités en cours

Feuille n°20 : Exercice 1, Exercice 2, Exercice 4, Exercice 7, Exercice 8, Exerice 9, Exercice 12, Exercice 13, Exercice 15
Feuille n°21 : Exercice 1 (1,2,6), Exercice 2, Exerice 7 (1,4), Exercice 12, Exercice 16