Logique

Exercice 1. *Opérateur logique* nand

On définit l'opérateur logique nand par : P nand $Q \equiv$ non(P et Q) pour toutes propositions P et Q. On fixe deux propositions P et Q.

1. Dresser la table de vérité de la loi nand.
2. Exprimer P nand Q à l'aide des opérateurs logiques ou et non.
3. Exprimer non(P), P et Q et P ou Q en utilisant uniquement l'opérateur logique nand .

Exercice 2. *Opérateur logique* nor.

On définit l'opérateur logique nor par : P nor $Q \equiv$ non(P ou Q) pour toutes propositions P et Q. On fixe deux propositions P et Q.

1. Dresser la table de vérité de la loi nor.
2. Exprimer P nor Q à l'aide de l'opérateur logique et.
3. Exprimer non(P), P et Q et P ou Q en utilisant uniquement l'opérateur logique nor.

Exercice 3. *Opérateur logique "ou exclusif".*

L'opérateur "ou exclusif" est une opérateur qui, à deux propositions P et Q, associe V si P et Q n'ont pas la même valeur de vérité et F sinon. On note l'opérateur logique "ou exclusif" $\oplus$. On fixe trois propositions P, Q et R.

1. Dresser la table de vérité de $\oplus$.
2. Exprimer $P \oplus Q$ à l'aide des opérateurs et, ou et non.
3. Montrer que $P \oplus Q \equiv \text{non}(P \iff Q)$.
4. Montrer que $(P \oplus Q) \oplus R \equiv P \oplus (Q \oplus R)$ et $(P \oplus Q)$ et $R \equiv (P$ et $R) \oplus (Q$ et $R)$.
5. Simplifier les expressions suivantes : $P \oplus F$, $P \oplus V$, $P \oplus P$ et $P \oplus \text{non}(P)$.

Exercice 4. *Connecteur logique* ou.

Soient P et Q deux propositions.

1. Exprimer la proposition P ou Q sous la forme d'une implication.
2. Décrire alors deux méthodes similaires de démonstration de la proposition P ou Q.

Exercice 5. *Négation.*

Soit $t \in \mathbb{R}$. Donner la négation des expressions suivantes :

1. "$t > 1$"
2. "$t \leq 2$"
3. "$t \in [0, 1]$"
4. "$t \leq 0$ ou $t > 1$"
5. "$\sin(t) = 0$ et $t > 0$"
6. "Si $t > 0$, alors $\exp(t) > 2$."
7. "$t = 0$ si, et seulement si, $\exp(t) = 1$".

Exercice 6. *Conditions nécessaires - Conditions suffisantes.*

Soient P_1 et P_2 deux propositions. Exprimer à l'aide d'opérateurs logiques les expressions suivantes :

1. "Une condition nécessaire à P_1 est P_2."
2. "Une condition suffisante à P_1 est P_2."
3. "Une condition nécessaire et suffisante à P_1 est P_2."

Exercice 7. *Implications - équivalences*

Soit $x \in \mathbb{R}$. Compléter les pointillés par les connecteurs logiques $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$ ou $\Longleftrightarrow$.

1. $x^2 = 4 \ldots\ldots x = 2$
2. $\sqrt{x}$ existe $\ldots\ldots x \geq 0$
3. $e^x = 1 \ldots\ldots x = 0$
4. $|x| \leq 5 \ldots\ldots 0 \leq x \leq 5$

Exercice 8. *Équation*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

1. $|x^2 - 8x + 11| = 4$
2. $\sqrt{x + 7} = 5 - x$

Bien spécifier à chaque étape si il y a équivalence ou implication.

Exercice 9. *Quelques raisonnements.*

Soient P_1, P_2 et P_3 trois propositions. Indiquer si les raisonnements suivants sont justes ou non. Le cas échéant, on pourra modifier l'affirmation pour la rendre juste ou, éventuellement, plus pertinente.

1. Je sais que ((P_1 et P_2) $\Longrightarrow P_3$), j'en conclus $P_1 \Longrightarrow P_3$.
2. Je sais que ((P_1 ou P_2) $\Longrightarrow P_3$), j'en conclus $P_1 \Longrightarrow P_3$.
3. Je sais que ($P_1 \Longrightarrow P_3$), j'en conclus (P_1 ou P_2) $\Longrightarrow P_3$.
4. Je sais que ($P_1 \Longrightarrow P_3$), j'en conclus (P_1 et P_2) $\Longrightarrow P_3$.
5. Je sais que ((P_1 ou P_2) $\Longrightarrow P_3$), j'en conclus ($P_1 \Longrightarrow P_3$) et ($P_2 \Longrightarrow P_3$).
6. Je sais que ((P_1 ou P_2) $\Longrightarrow P_3$), j'en conclus que si P_1 est vrai alors ($P_2 \Longrightarrow P_3$).
7. Je sais que ((P_1 et P_2) $\Longrightarrow P_3$), j'en conclus que $P_1 \Longrightarrow (P_2 \Longrightarrow P_3)$.

Exercice 10. *Expressions quantifiées.*

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Traduire en langage ordinaire les phrases logiques suivantes.
   (a) $\exists t \in \mathbb{R} \quad t > 6$
   (b) $\forall y \in \mathbb{R} \quad f(y) > 3$
   (c) $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad \alpha > 3$
   (d) $\forall z \in \mathbb{R}^+ \quad f(z) > 0$
   (e) $\exists x \in [0,1] \quad f(x) = 0$
   (f) $\forall t \in \mathbb{R} \quad |t+7| > 20$
2. Exprimer la négation des affirmations précédentes.
3. Préciser, parmi les propositions précédentes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ? On justifiera sa réponse.

Exercice 11. *Propositions quantifiées.(2)*

1. Traduire en langage ordinaire les phrases logiques suivantes.
   (a) $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ m > n$
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ m > n$
   (c) $\forall x \in \mathbb{Q}\ \forall z \in \mathbb{Q}\ \exists y \in \mathbb{Q}\ x < y < z$
   (d) $\forall n \in \mathbb{N}\ n > 3 \implies n > 6$
   (e) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ m \leq n$
   (f) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists p \in \mathbb{N}\ n = 2p+1$
   (g) $\forall x \in \mathbb{R}\ x < 2 \implies x^2 < 4$
2. Exprimer la négation des affirmations précédentes.
3. Préciser, parmi les propositions précédentes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ? On justifiera sa réponse.

Exercice 12. *Propositions quantifiées.(3)*

1. Traduire en langage quantifié les affirmations suivantes :
   (a) Le carré de tout nombre réel est positif.
   (b) L'entier n divise l'entier m.
   (c) Un nombre entier divisible par 10 est divisible par 5.
   (d) Il existe un nombre impair divisible par 2.
   (e) Le produit de deux nombres réels est positif si et seulement si ces deux nombres réels sont de même signe.
   (f) Les deux seules solutions de l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ sont 2 et 3.
2. Exprimer la négation des affirmations précédentes.
3. Préciser, parmi les propositions précédentes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ?

Exercice 13. *Fonctions constantes.*

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. On considère la proposition P : "f est constante.".

1. Exprimer la proposition P à l'aide de quantificateurs en ne faisant apparaitre une évaluation de f qu'en un seul point.
2. Exprimer alors la négation de la proposition P.
3. Réexprimer la négation de la proposition P en exploitant des évaluations de f en deux points.
4. En déduire une nouvelle expression de la proposition P.
5. Vérifier que les deux expressions de P sont équivalentes.

Exercice 14. *Fonctions strictement croissante*

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. On considère la proposition P : "f est strictement croissante.".

1. Exprimer la proposition non(P) à l'aide de quantificateur.
2. En déduire une expression quantifiée de P.

Exercice 15. *Encore des fonctions*

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs et donner la négation des expressions suivantes :

1. f est majorée.
2. f est bornée.
3. f est paire.
4. f ne s'annule jamais.
5. f est strictement décroissante.
6. f n'est pas la fonction nulle.
7. f est inférieure à g.

Exercice 16. *Quantificateurs et connecteurs logiques.*

Soit E un ensemble et P et Q deux prédicats sur E.

1. Relier les propositions suivantes par l'un des symboles $\implies$, $\impliedby$ ou $\iff$:
   (a) $\forall x \in E\ P(x)$ et $Q(x)$
   $(\forall x \in E\ P(x))$ et $(\forall x \in E\ Q(x))$
   (b) $\exists x \in E\ P(x)$ et $Q(x)$
   $(\exists x \in E\ P(x))$ et $(\exists x \in E\ Q(x))$
   (c) $\forall x \in E\ P(x)$ ou $Q(x)$
   $(\forall x \in E\ P(x))$ ou $(\forall x \in E\ Q(x))$
   (d) $\exists x \in E\ P(x)$ ou $Q(x)$
   $(\exists x \in E\ P(x))$ ou $(\exists x \in E\ Q(x))$
2. Démontrer les relations que vous venez d'établir.
3. Donner un contre-exemple à chacune des implications non établies précédemment.

Exercice 17. *Quantificateurs et connecteurs logiques.(2)*

1. Soit P, Q et R trois propositions. Établir les relations suivantes :
   (a) $((P \text{ et } Q) \implies R) \iff (P \implies R) \text{ ou } (Q \implies R)$
   (b) $((P \text{ ou } Q) \implies R) \iff (P \implies R) \text{ et } (Q \implies R)$
2. Soit P, Q et R trois prédicats sur un ensemble E.
   (a) Relier les propositions suivantes par l'un des symboles $\implies$, $\impliedby$ ou $\iff$:
      i. $\forall x \in E\ (P(x) \text{ et } Q(x)) \implies R(x)$
         $(\forall x \in E\ (P(x) \implies R(x))) \text{ ou } (\forall x \in E\ (Q(x) \implies R(x)))$
      ii. $\forall x \in E\ (P(x) \text{ ou } Q(x)) \implies R(x)$
         $(\forall x \in E\ P(x) \implies R(x)) \text{ et } (\forall x \in E\ Q(x) \implies R(x))$
   (b) Démontrer les relations que vous venez d'établir.
   (c) Donner un contre-exemple à chacune des implications non établies précédemment.

Exercice 18. *Contraposition.*

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Écrire la contraposée des implications suivantes et les démontrer.
   (a) Si n est premier, alors $n = 2$ ou n est impair.
   (b) $xy \neq 0 \implies ((x \neq 0) \text{ et } (y \neq 0))$
   (c) $x \neq y \implies (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.
2. Énoncer avec des quantificateurs l'ensemble des résultats établis à la question 1.

Exercice 19. *Une propriété des nombres réels.*
Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer l'affirmation suivante : $(\forall \varepsilon > 0\ |a| < \varepsilon) \implies a = 0$.

Exercice 20. *Un peu d'arithmétique.*
On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Le but de cet exercice est de montrer que cet ensemble est infini.

1. En raisonnant par l'absurde, montrer que si un entier $q > 1$ divise un entier $n > 0$, alors q ne divise pas $n + 1$.
2. On suppose que $\mathcal{P}$ est fini, il existe donc $p_1, \ldots, p_n$ tels que $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, p_i ne divise pas $p_1 \ldots p_n + 1$.
3. Conclure.

Exercice 21. *Suite géométrique.*
Soit $q \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = qu_n$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0.q^n$.
2. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Exprimer u_n en fonction de u_m, q, n et m.
3. On suppose $q \neq 1$. Montrer, par récurrence, que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
4. Que devient la somme si $q = 1$?

Exercice 22. *Une suite.*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$.
Montrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{u_0}{1 + nu_0}$.

Exercice 23. *Une suite.(2)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$.
Montrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^n - 1$.