Développements limités

Exercice 1. *Déterminer les développements limités d'ordre n au point 0 des fonctions f suivantes :*

1. $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$, $n = 4$
2. $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1+x}$, $n = 4$
3. $f(x) = \mathrm{e}^x\sqrt{1+x}$, $n = 4$
4. $f(x) = \sqrt{x+2}$, $n = 3$
5. $f(x) = \ln(5+x)$, $n = 3$
6. $f(x) = \ln(1+x+\sqrt{1+x})$, $n = 3$
7. $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$, $n = 2$
8. $f(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)}$, $n = 3$
9. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)$, $n = 3$
10. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3x+1}$, $n = 3$
11. $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$, $n = 3$
12. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+2}$, $n = 3$
13. $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$, $n = 4$
14. $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1+\mathrm{e}^x}$, $n = 4$

Exercice 2. *Produit et gain d'ordre*
On veut calculer le développement limité de $f(x) = (\mathrm{ch}(x)-1)\ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 5.

1. Donner des équivalents simples de $\mathrm{ch}(x)-1$ et $\ln(1+x)$ en 0.
2. Préciser à quel ordre faut-il calculer les développements limités de $\mathrm{ch}(x)-1$ et $\ln(1+x)$ pour obtenir celui de $f(x)$ par produit ?
3. Calculer le développement limité de $f(x)$ demandé.

Exercice 3. *Produit et gain d'ordre*
On veut calculer le développement limité de $f(x) = \mathrm{sh}^2(x)(\sqrt{1+x^2}-1)$ en 0 à l'ordre 5.

1. Donner des équivalents simples de $\mathrm{sh}(x)$ et $\sqrt{1+x^2}-1$ en 0.
2. Préciser à quel ordre faut-il calculer les développements limités de $\mathrm{sh}^2(x)$ et $\sqrt{1+x^2}-1$ pour obtenir celui de $f(x)$?
3. Calculer le développement limité de $f(x)$ demandé.

Exercice 4. *Produit et gain d'ordre*
Déterminer les développements limités d'ordre n au point 0 des fonctions f suivantes :

1. $f(x) = \cos(x)\ln(1+x)$, $n = 4$
2. $f(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{1+x}$, $n = 3$
3. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+\sin(x)}}$, $n = 3$
4. $f(x) = (1-\cos x)(1-\mathrm{ch}(x)$, $n = 7$

Indication : Dans chacun des calculs, il est possible de faire un gain d'ordre.

Exercice 5. *Composée et gain d'ordre*
On veut calculer le développement limité de $f(x) = \ln(1+\sin^2(x))$ à l'ordre $n = 6$.

1. Donner un équivalent simple de $u = \sin^2(x)$ en 0.
2. A quel ordre doit-on calculer le développement de $\ln(1+u)$ pour obtenir celui de $f(x)$?
3. Calculer le développement limité de $f(x)$ demandé.

Exercice 6. *Composée et gain d'ordre*
On veut calculer le développement limité de $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$ à l'ordre $n = 6$. On remarque que : $\sqrt{\cos(x)} = \sqrt{1+(\cos(x)-1)}$.

1. Donner un équivalent simple de $u = \cos(x)-1$ en 0.
2. A quel ordre doit-on calculer le développement de $\sqrt{1+u}$ pour obtenir celui de $f(x)$?
3. Calculer le développement limité de $f(x)$ demandé.

Exercice 7. *Composée et gain d'ordre*
On veut calculer le développement limité de $f(x) = \mathrm{ch}(\sin(x))$ à l'ordre 6.

1. Quel est le premier terme non nul et non constant des développements limités de $\mathrm{ch}(x)$ en 0 ?
2. A quel ordre faut-il alors calculer le développement limité de $\sin(x)$ pour obtenir celui de $f(x)$?
3. Calculer le développement limité de $f(x)$ demandé.

Exercice 8. *Composée et gain d'ordre*
Déterminer les développements limités d'ordre n au point 0 des fonctions f suivantes :

1. $f(x) = \ln(\cos(x))$, $n = 4$
2. $f(x) = \ln(1+\cos(x)$, $n = 4$
3. $f(x) = (1+x)^x$, $n = 6$
4. $f(x) = \cos(x)^{\sin(x)}$, $n = 6$

Indication : Dans chacun des calculs, il est possible de faire un gain d'ordre.

Exercice 9. *Intégration*
On se propose de calculer le développement limité de $\tan(x)$ à l'ordre 7.

1. Déterminer le développement limité de $\tan(x)$ à l'ordre par le calcul du quotient de $\sin(x)$ par $\cos(x)$.
2. Rappeler l'expression de $\tan'(x)$ en fonction de $\tan(x)$.
3. En déduire un développement limité de $\tan'(x)$ en 0 à l'ordre 6.

4. En intégrant ce développement limité, en déduire le développement limité de $\tan(x)$ en 0 à l'ordre 7.

Exercice 10. *Déterminer les développements limités d'ordre n au point a des fonctions f suivantes :*

1. $f(x) = e^x$, $a = 2$, $n = 3$
2. $f(x) = \ln(x)$, $a = 3$, $n = 3$
3. $f(x) = \cos(x)$, $a = \dfrac{\pi}{3}$, $n = 4$
4. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 2$, $n = 3$
5. $f(x) = \tan(x)$, $a = \dfrac{\pi}{4}$, $n = 2$
6. $f(x) = \ln(\sqrt{x})$, $a = 1$, $n = 3$

Exercice 11. *Étude de la fonction* $\dfrac{\sin(x)}{x}$ *en 0*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

1. Montrer que la fonction f se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable.
   Préciser la position relative de la tangente et du graphe de f au voisinage de 0.
2. Montrer que la fonction est alors deux fois dérivable.

Exercice 12. *Étude de la fonction* $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ *en 0*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

1. Montrer que la fonction f se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable.
   Préciser la position relative de la tangente et du graphe de f au voisinage de 0.
2. Montrer que la fonction est alors deux fois dérivable.

Exercice 13. *Étude de la fonction* $\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}$ *en 0*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}$.

Montrer que la fonction f se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable.
Préciser la position relative de la tangente et du graphe de f au voisinage de 0.

Exercice 14. *Déterminer, si elle existe, une équation de l'asymptote de $f(x)$ en $+\infty$ ainsi que la position relative du graphe de f au voisinage de $+\infty$.*

1. $f(x) = \sqrt{x^4 + 4x^3 + 3} - x^2$
   On montrera qu'il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $\sqrt{x^4 + 4x^3 + 3} = ax^2 + bx + c + \dfrac{d}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2. $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 3}$
   On montrera qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\sqrt{x^4 + 4x^3 + 3} = ax + b + \dfrac{c}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
3. $f(x) = (x-2)\exp\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$
   On montrera qu'il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x} + \dfrac{d}{x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
4. $f(x) = (x+1)\arctan(x)$
   On montrera qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   Indication : Que vaut $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ lorsque $x > 0$?
5. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}\ln\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)$
   On montrera qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
6. $f(x) = \dfrac{1+x}{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}$
   On montrera qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
7. $f(x) = x^2\ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)$ On montrera qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
8. $f(x) = x^2\ln\left(1 + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right)$
   On montrera qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
9. $f(x) = x^{\frac{1+x}{x}} - \ln(x)$
   On montrera qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $f(x) = ax + b\ln(x) + c\dfrac{\ln^2(x)}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{\ln^2(x)}{x}\right)$.

Exercice 15. *Déterminer la nature des points de paramètre* 0 *des courbes de paramétrages* $(x(t), y(t))$ *dans les cas suivants :*

1. $\begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 - \cos(t) \end{cases}$

2. $\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$

3. $\begin{cases} x(t) = \sin(t)^2 \\ y(t) = t + \dfrac{1}{t-1} \end{cases}$

4. $\begin{cases} x(t) = t(\exp(t) - 1) \\ y(t) = \ln(\operatorname{ch}(t)) \end{cases}$

5. $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{t^3 - 4t + 3} \\ y(t) = \ln\left(1 + t^2 + \dfrac{4}{3}t^3\right) \end{cases}$

6. $\begin{cases} x(t) = \tan(t) - \sin(t) \\ y(t) = \dfrac{1}{\cos(t)} \end{cases}$

7. $\begin{cases} x(t) = t - \operatorname{th}(t) \\ y(t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)} \end{cases}$

Exercice 16. *Étude d'une courbe*

On considère Γ la courbe paramétrée par : $\begin{cases} x(t) = \sin(3t) + 3\sin(t) \\ y(t) = \sin(t) + \cos(t) \end{cases}$

1. Montrer que l'on peut réduire l'étude de Γ à $[0, \pi]$.
2. Étudier les variations de x et y sur $[0, \pi]$.
3. La courbe Γ admet un unique point stationnaire en un paramètre $t = t_0$ que l'on précisera.
   Préciser la nature de ce point stationnaire en précisant un vecteur tangent à Γ en ce point.
4. Représenter graphiquement la courbe Γ.

Exercice 17. *Étude d'une courbe*

On considère Γ la courbe paramétrée par : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{(t+1)^2}{t+2} \\ y(t) = \dfrac{t(t^2 + 6*t + 7)}{t+2} \end{cases}$ pour $t \neq -2$.

1. Étudier les variations de x et y sur $[0, \pi]$.
2. La courbe Γ admet un unique point stationnaire en un paramètre $t = t_0$ que l'on précisera.
   Préciser la nature de ce point stationnaire en précisant un vecteur tangent à Γ en ce point.
3. (a) Montrer que $x(t)$ et $y(t)$ admettent un développement asymptotique de la forme $\dfrac{a}{t+2} + b + c(t+2) + \underset{t \to 2}{o}(t+2)$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
   (b) En déduire que Γ admet une asymptote en $t = -2$ et préciser la position relative de la courbe par rapport à son asymptote au voisinage de $t = -2$.
4. (a) Déterminer $(a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $x(t) = a_1 t + b_1 + \dfrac{c_1}{t} + \underset{t \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t}\right)$.
   (b) Déterminer $(a_2, b_2, c_2, d_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $y(t) = a_2 t^2 + b_2 t + c_2 + \dfrac{d_2}{t} + \underset{t \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t}\right)$.
   (c) Déterminer alors $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} y(t) - ax^2(t) - bx(t) - c = 0$.
   Ainsi, la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$ est un parabole-asymptote de la courbe Γ en $+\infty$.
   (d) Préciser, en calculant un développement limité généralisé de $y(t) - ax(t) - bx(t) - c$, la position relative de Γ et de $\mathcal{P}$ au voisinage de $+\infty$.
5. Le développement limité généralisé de $y(t) - ax(t) - bx(t) - c$ est également valable en $-\infty$.
   Préciser la position relative de Γ et de $\mathcal{P}$ au voisinage de $-\infty$.
6. Tracer la courbe Γ.

Exercice 18. *Développement limité de la réciproque d'une fonction*

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2} - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Étudier le signe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(t) = (2t-1)e^t + 1$.
2. (a) Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et impaire.
   Préciser la valeur de $f'(x)$ pour tout réel x.
   (b) Dresser le tableau de variations de f.
   Après les avoir calculer, on y précisera les limites de f.
   (c) En déduire que f est une bijection entre deux ensembles que l'on précisera.
3. Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 5.
4. On admet que f^{-1} la réciproque de f admet un développement limité en 0 de la forme :

$$f^{-1}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \underset{x \longrightarrow 0}{o}(x^5)$$

   (a) Montrer que f^{-1} est une fonction impaire.
   Que peut-on en déduire sur son développement limité ?
   (b) Calculer de deux manières distinctes le développement limité de $f(f^{-1}(x))$.
   (c) En déduire le développement limité de f.