Structures algébriques

Exercice 1. *Un groupe*

Soit $E =]-1,1[$. Pour tout $(a,b) \in E^2$, on pose $a \star b = \dfrac{a+b}{1+ab}$.

1. Montrer que $\star$ est une loi de composition interne sur E.
2. Montrer que $(E, \star)$ est un groupe abélien.

Exercice 2. *Préciser dans chacun des cas suivants si $(G, \otimes)$ est un groupe. Le cas échéant, on précisera s'il est commutatif ou non.*

1. $G = \mathbb{R}$ et $x \otimes y = x + y + 3$.
2. $G = \mathbb{R}$ et $x \otimes y = x + y + xy$.
3. $G =]-1, +\infty[$ et $x \otimes y = 1 + (x-1)(y-1)$.
4. $G = \mathbb{R}^2$ et $(x,y) \otimes (x',y') = (x + x', y\mathrm{e}^{x'} + y'\mathrm{e}^{x})$.
5. $G = \mathcal{S}_E$ l'ensemble des bijections d'un ensemble E dans lui-même et $\otimes = \circ$.
6. G, l'ensemble des applications croissantes et bijectives d'un ensemble ordonné $(E, \preceq)$ et $\otimes = \circ$.
7. $G = G_1 \times G_2$ et $(x,y) \otimes (x',y') = (x * x', y \times y')$ où $(G_1, *)$ et $(G_2, \times)$ sont des groupes.
8. $G = \mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité et $\otimes$ désigne la multiplication des complexes.

Exercice 3. *Généralisation du groupe des similitudes*

Soit $G = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.
On définit sur G la loi de composition interne : $(x,y) \otimes (x',y') = (xx', x^n y' + y)$

1. Montrer que G muni de la loi $\otimes$ est un groupe.
2. $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ sont-ils des sous-groupes de $(G, \otimes)$?
3. On considère $\mathcal{S}$ l'ensemble des similitudes directes de $\mathbb{C}$ muni de la loi de composition.
   (a) Montrer que $(\mathcal{S}, \circ)$ est un groupe.
   (b) On considère l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ (a,b) & \longrightarrow & s \text{ la similitude de représentation complexe } z' = az + b \end{array} \right.$
   Montrer que si $n = 1$, alors l'application φ est un isomorphisme de groupes.

Exercice 4. *Deux équations*

On considère deux éléments a et b de $(G, *)$, un groupe.

1. Résoudre dans G les équations d'inconnue x suivantes : $x * a = b$ et $a * x = b$.
2. Que dire des applications $(x \mapsto a * x)$ et $(x \mapsto x * a)$?

Exercice 5. *Équation et morphisme de groupe*

Soient $(G_1, *)$ et $(G_2, \otimes)$ deux groupes et $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ un morphisme de groupe. Soit $b \in G_2$. On considère l'équation d'inconnue $x \in G_1$: $(E_b) \quad \varphi(x) = b$.

1. (a) Pour quelle valeur de b le noyau $\ker(\varphi)$ de φ est-il l'ensemble des solutions de E_b ?
   (b) Soit a une solution de (E_b).
   A l'aide de $\ker(\varphi)$ et de a, déterminer l'ensemble des solutions de (E_b).
2. **Application :**
   Soit D : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right.$
   Soit $g \in \mathcal{C}^0$. On considère l'équation d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$: $(E_g) \quad \mathrm{D}(f) = g$.
   (a) Montrer que D est un morphisme de groupe de $(\mathcal{C}^1(\mathbb{R}), +)$ dans $(\mathcal{C}^0(\mathbb{R}), +)$.
   (b) Déterminer $\ker(\mathrm{D})$.
   (c) Que dire de l'ensemble des solutions de (E_g) ? Quel résultat classique vient-on de retrouver ?

Exercice 6. *Centre d'un groupe*

Soit $(G, *)$ un groupe. Soit $Z = \{x \in G \ / \ \forall y \in G \ x * y = y * x\}$.
Montrer que Z est un sous-groupe de G. (Il est appelé centre du groupe G.)

Exercice 7. *Morphisme de groupe et commutativité*

Soit $(G, \otimes)$ un groupe.

1. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$.
   Montrer que f est un morphisme de groupe si et seulement si G est un groupe abélien.
2. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array} \right.$. Montrer que f est un morphisme de groupe si et seulement si G est un groupe abélien.
3. Soit f un endomorphisme de G tel que : $\forall (x,y) \in G^2 \quad f(x^2y^3) = x^3y^2$.
   Montrer que G est abélien.

Exercice 8. *Anneau de Gauss*

On note : $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \left\{a + \text{ß}b \in \mathbb{C} \ / \ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
   Cette anneau est appelé l'anneau de Gauss.
2. On rappelle que les nombres inversibles d'un anneau A sont les éléments $\alpha \in A$ tels que : $\exists \beta \in A \quad \alpha.\beta = \beta.\alpha = 1_A$
   (a) On considère l'application suivante : $N : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\mathrm{i}] & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ z & \longmapsto & z\bar{z} \end{array} \right.$
   Montrer que : $\forall (z_1, z_2) \in (\mathbb{Z}[\mathrm{i}])^2 \quad N(z_1.z_2) = N(z_1).N(z_2)$
   (b) Soit $z \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$.
   Montrer alors que z est inversible dans $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ si, et seulement si, $N(z) = 1$.
   (c) En déduire que $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ admet exactement quatre éléments inversibles que l'on précisera.

Exercice 9. *Une structure d'anneau sur* $\mathbb{R}^2$

Sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$ on définit deux lois de composition interne de la façon suivante :

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y') \text{ et } (x,y) \times (x',y') = (xx', xy' + x'y)$$

1. Démontrer que $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux opérations possède une structure d'anneau commutatif.
2. On note Θ l'élément nul de cet anneau. Démontrer que l'on peut trouver des éléments A et B de $\mathbb{R}^2$ vérifiant : $A \times B = \Theta$ avec $A \neq \Theta$ et $B \neq \Theta$.
   Un tel anneau dans lequel un produit de facteurs peut être « nul » sans qu'aucun des facteurs ne le soit est dit non intègre ; A et B sont alors appelés des diviseurs de zéro. Nous rencontrerons de tels anneaux dans le calcul matriciel.
3. Déterminer les éléments inversibles de cet anneau.
4. A quelle condition un élément de $\mathbb{R}^2$ est-il le carré d'un autre élément de $\mathbb{R}^2$? Quels sont les éléments de $\mathbb{R}^2$ dont le carré est égal à Θ ? Le résultat n'est-il pas étonnant ?

Exercice 10. *Une structure d'anneau sur* $\mathbb{R}^3$

On définit deux lois de composition interne sur $\mathbb{R}^3$ par les relations suivantes : $(x,y,z) + (x',y',z') = (x+x', y+y', z+z')$ et $(x,y,z) \times (x',y',z') = (xx', xy' + yx', xz' + x'z)$. Montrer que ces deux lois définissent sur $\mathbb{R}^3$ une structure d'anneau.

Exercice 11. *Une structure de corps sur* $\mathbb{R}$

Sur $\mathbb{R}$, on définit deux lois de composition interne par : $x \oplus y = x + y - 1$ et $x \otimes y = x + y - xy$.
Démontrer que $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ est un corps.

Exercice 12. *Division euclidienne*

Si on divise 4294 et 3521 par un même entier positif, on obtient respectivement pour restes 10 et 11. Quel est ce nombre ?

Exercice 13. *Division euclidienne et opérations*

Soient $b \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2$.
On note r_1 et r_2 les restes respectifs de la division euclidienne de a_1 et a_2 par b.

1. Montrer que $a_1 + a_2$ et $r_1 + r_2$ ont le même reste pour leurs divisions euclidiennes par b.
2. Montrer que $a_1 a_2$ et $r_1 r_2$ ont le même reste pour leurs divisions euclidiennes par b.

Exercice 14. *Nombres de Fermat*

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si $2^n + 1$ est premier, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2^k$.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on note : $F_n = 2^{2^n} + 1$. Le nombre F_n est appelé $n^{\text{ème}}$ nombre de Fermat.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad F_{n+1} = \left(\prod_{k=0}^{n} F_k \right) + 2$
3. En déduire que, pour tout n et m entiers naturels distincts, F_n et F_m sont premiers entre eux.

Exercice 15. *Un test de primalité*

Soit p un entier naturel. Montrer que p est premier si et seulement si il n'admet pas de diviseurs plus petits que $\sqrt{p}$.