# Suites de nombres réels

**Exercice 1.** *Quelques inégalités*

Soient $a$ et $b$ deux réels. Montrer les inégalités suivantes :

1. $ab \leq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$
2. $ab \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$
3. si $a$ et $b$ sont positifs, $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

**Exercice 2.** *Un encadrement de $n!$*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $(n!)^2 = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k(n-k+1)$.
2. (a) Encadrer, aussi finement que possible, $k(n-k+1)$ lorsque $k \in [\![1, n]\!]$.

   (b) En déduire : $n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

**Exercice 3.** *Encore des inégalités*

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels positifs et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels supérieurs ou égaux à 1.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n + \displaystyle\prod_{k=1}^{n} b_k \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} b_k$.

**Exercice 4.** *Valeurs absolues, maximum et minimum*

Soient $a$ et $b$ deux réels. Montrer les formules suivantes :

$$\max(a,b) = \frac{a+b+|b-a|}{2} \qquad \min(a,b) = \frac{a+b-|b-a|}{2}$$

**Exercice 5.** *Fausses propriétés de* E

Soient $a$ et $b$ deux réels. A l'aide de contre-exemples, montrer que les égalités suivantes sont fausses en générale :

1. $\mathrm{E}(-a) = -\mathrm{E}(a)$
2. $\mathrm{E}(a+b) = \mathrm{E}(a) + \mathrm{E}(b)$
3. $\mathrm{E}(ab) = \mathrm{E}(a)\mathrm{E}(b)$

**Exercice 6.** *Vraies propriétés de* E

Soient $a$ et $b$ deux réels et $n$ un entier relatif. Démontrer les résultats suivants :

1. $a - 1 < n \leq a \implies \mathrm{E}(a) = n$
2. $a \leq b \implies \mathrm{E}(a) \leq \mathrm{E}(b)$
3. $\mathrm{E}(a) + \mathrm{E}(b) \leq \mathrm{E}(a+b) \leq \mathrm{E}(a) + \mathrm{E}(b) + 1$

**Exercice 7.** Déterminer la valeur de $\mathrm{E}(x) + \mathrm{E}(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

**Exercice 8.** *Une équation*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\mathrm{E}(2x+1) = \mathrm{E}(3x+1)$.

**Exercice 9.** *Une égalité*

Pour $x$ réel et $n$ entier naturel non nul, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{E}(x + \frac{k}{n}) = \mathrm{E}(nx)$.

**Exercice 10.** *Intervalle*

Soit $I$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que si $\forall x \in I\ \forall y \in \mathbb{R}\ y \geq x \implies y \in I$, alors $I$ est de la forme $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$ ou $\mathbb{R}$ avec $a$ un réel.

**Exercice 11.** *Majorant, minorant : quantificateurs et exemples*

1. Soient $A \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. Traduire à l'aide de quantificateur ($\forall$ et $\exists$) les affirmations suivantes :

   (a) 5 est un majorant de $A$.
   (b) $m$ est un minorant de $A$.
   (c) $M$ est un majorant de $A$.
   (d) $A$ est majoré.
   (e) $A$ est minoré.
   (f) $A$ est borné.
   (g) $A$ n'est pas minoré.

2. Donner un sous-ensemble de $\mathbb{R}$,

   (a) qui ne possède pas de borne inférieure.
   (b) qui possède une borne inférieure mais pas un minimum.
   (c) qui possède un minimum.

**Exercice 12.** *Borne sup, borne inf, max, min...*

Soient $a$ et $b$ deux réels. Déterminer, s'ils existent, la borne inférieure, supérieure, le plus petit ou le plus grand élément de :

1. $\left\{\frac{1}{n}/n \in \mathbb{N}^*\right\}$
2. $\left\{\frac{n}{n+1}/n \in \mathbb{N}^*\right\}$
3. $\left\{1-\frac{1}{n}/n \in \mathbb{N}^*\right\}$
4. $\left\{\frac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}}/n \in \mathbb{N}^*\right\}$
5. $\left\{a+\frac{b}{n}/n \in \mathbb{N}^*\right\}$
6. $\left\{\frac{x}{x+1}/x \in ]0,1]\right\}$
7. $\left\{\sin(x)+\sqrt{3}\cos(x)/x \in \mathbb{R}\right\}$
8. $\{\sin(x)+3\cos(x)/x \in \mathbb{R}\}$
9. $\left\{\frac{x-1}{x^2+1}/x \in \mathbb{R}\right\}$
10. $[0,1] \cap \mathbb{Q}$
11. $]0,1[\cap\mathbb{Q}$
12. $\{x \in \mathbb{Q}/x^2 < 2\}$

**Exercice 13.** *Racine carrée, partie entière, borne sup...*

Soit $A = \{\sqrt{k} - \mathrm{E}(\sqrt{k})/k \in \mathbb{N}\}$.

1. Déterminer le plus petit élément de $A$.
2. Déterminer un majorant de $A$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $x_n = n^2 + 2n$. Montrer que $\sqrt{x_n} - \mathrm{E}(\sqrt{x_n}) \geq 1 - \frac{1}{n}$.
4. Que peut-on en conclure ?

**Exercice 14.** *Bornes supérieure et inférieure versus opérations ensemblistes*

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles bornés et non vides de $\mathbb{R}$.

1. Déterminer $\sup(A \cup B)$ en fonction de $\sup(A)$ et $\sup(B)$.
2. Déterminer $\inf(A \cup B)$ en fonction de $\inf(A)$ et $\inf(B)$.
3. On suppose $A \cap B$ non vide.
   Montrer que $\max(\inf(A), \inf(B)) \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B))$.
   Donner un exemple où il n'y a pas égalité.

**Exercice 15.** *Borne sup, borne inf et opérations*

Soient $A$ et $B$ deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On note : $A + B = \{a + b/ a \in A \text{ et } b \in B\}$, $-A = \{-a/a \in A\}$ et $A^{-1} = \{a^{-1}/a \in A\}$.

1. Montrer que si $A \subset B$ et $B$ est majorée, alors $A$ est majorée et $\sup(A) \leq \sup(B)$.
2. Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
3. Montrer que si $A$ est majorée, alors $-A$ est minorée et $\inf(-A) = -\sup(A)$.
4. Si $A \subset \mathbb{R}^{+*}$ et $A$ est majorée, montrer que $A^{-1}$ est minorée et que $\inf(A^{-1}) = \frac{1}{\sup(A)}$.

**Exercice 16.** *Approximation décimale par défaut*

Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{\mathrm{E}(10^n x)}{10^n}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. En déduire que $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux est dense dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 17.** *Encore une suite avec des parties entières*

Soit $x$ un nombre réel. Pour $n$ entier naturel non nul on pose $u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{E}(kx)$.

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite

**Exercice 18.** *Monotonie et application linéaire*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

1. **Question préliminaire :**
   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   En utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, montrer qu'il existe deux suites de rationnelles $(\alpha_n)_{\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_n \leq x \leq \beta_n$
   (b) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \beta_n = x$
2. Montrer successivement :
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad f(nx) = nf(x)$
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{Z} \quad f(nx) = nf(x)$
   (c) $\forall q \in \mathbb{Q} \quad f(q) = qf(1)$
3. On suppose, de plus, que la fonction $f$ est croissante.
   En utilisant la question 1, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = xf(1)$.

**Exercice 19.** *Suites dans* $[0,1]$

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $[0,1]$ telles que la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 1.

**Exercice 20.** *Suites arithmético-géométriques*

1. Etudier la suite définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = 2u_n + 3$.
2. Etudier la suite définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} + u_n = 4$.

**Exercice 21.** *Suite arithmético-géométrique (cas général)*

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq 1$. On étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = au_n + b$.

1. On suppose, pour cette question, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Déterminer la limite $l$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - l$.
2. Trouver une relation de récurrence entre $v_{n+1}$ et $v_n$.
3. En déduire une expression de $v_n$ puis de $u_n$ en fonction de $n$.
4. Discuter de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Exercice 22.** *Suites récurrentes d'ordre* 2

Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

1. $u_0 = 2$, $u_1 = 3$, et pour tout entier $n \geq 0$ : $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
2. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, et pour tout entier $n \geq 0$ : $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
3. $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et pour tout entier $n \geq 0$ : $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.
4. $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, et pour tout entier $n \geq 0$ : $\dfrac{1}{u_{n+2}} = \dfrac{1}{u_{n+1}} + \dfrac{1}{u_n}$.
5. $u_0 > 0$, $u_1 > 0$, et pour tout entier $n \geq 0$ : $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^5}{u_n^6}$.

**Exercice 23.** *Suites extraites*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.
Montrer que, si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, alors $(u_n)$ est convergente.

**Exercice 24.** *Suites extraites et monotonie*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de nombres réels possédant une suite extraite convergente.
Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle même convergente.

**Exercice 25.** *Suites périodiques*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique si $\exists p \in \mathbb{N}^* \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} = u_n$. Le nombre $p$ est alors appelé période de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique et convergente, alors elle est constante.

**Exercice 26.** *Séries alternées*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs qui décroit et converge vers 0 et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^i u_i$.

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

**Exercice 27.** *Série harmonique*

Pour tout entier naturel non nul $n$ on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle monotone ?
2. Vérifier que pour tout entier naturel non nul $n$ on a $u_{2n} - u_n \geq \dfrac{1}{2}$.
3. Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ? Quelle est sa limite ?
4. Pour tout entier naturel non nul $n$ on pose $v_n = u_n - \ln(n)$.
   (a) Démontrer que $\dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \dfrac{1}{n}$.
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente.
   Sa limite (que l'on ne cherchera pas à calculer) est notée $\gamma$ et est appelée constante d'Euler ($\gamma = 0,577216$ ).
   (c) Quel développement asymptotique obtient-on pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ?

**Exercice 28.** *Irrationalité de* e

Soient $u_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$.

1. Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite.
3. On note $e$ leur limite.
   Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers tels que $\dfrac{a_n}{n!} < \mathrm{e} < \dfrac{a_n + 1}{n!}$.
4. En déduire que leur limite e est irrationnel.

**Exercice 29.** *Étude d'une suite définie par une somme*

On considère la suite définie par : $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

1. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
2. (a) Exprimer $w_n$ en fonction de la suite $(u_n)$ de l'exercice 27.
   (b) En déduire la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Exercice 30.** *Série de Riemann*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. On considère la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ définie par : $v_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ converge et déterminer sa limite.
   (b) Comparer $u_n$ et $v_n$ pour $n \geq 2$.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On donnera un encadrement de sa limite.

**Exercice 31.** *Suites définies par des produits*

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$ et par $v_n = u_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

1. Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Comparer les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent.

**Exercice 32.** *Nombre d'or*

Soient $f$ une fonction définie par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels définie par $u_0 \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ et $\forall n \geq 0 \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie pour tout $n$ et à valeurs dans $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$.
2. Déterminer l'unique valeur $\alpha$ telle que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \alpha$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9}|u_n - \alpha|$.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha$.

**Exercice 33.** *Une suite définie par récurrence*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{3x+5}{4x+2}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède exactement deux solutions, que l'on notera $a$ et $b$ avec $a < b$.
3. Montrer que $u_n$ est toujours différent de $a$.
4. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{u_n - b}{u_n - a}$ est une suite géométrique.
5. En déduire $v_n$ en fonction de $n$, puis $u_n$ en fonction de $n$. La suite $(u_n)$ est-elle convergente ?

**Exercice 34.** *Étude d'une suite définie par récurrence*

1. On étudie la fonction $f$ telle que $f(x) = 0$ si $x = 0$ et $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ sinon.
   (a) Obtenir l'ensemble de définition $D$ de $f$.
   (b) Justifier que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1[$ .
   (c) Dresser le tableau de variations de $f$. On y fera apparaître les différentes limites et la valeur de $f(\mathrm{e})$ .
2. On étudie la suite $v$ telle que $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{v_n}{\ln(v_n)}$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \geqslant \mathrm{e}$.
   (b) Justifier que la suite $v$ converge et déterminer sa limite.
   (c) Montrer que $\forall x \geqslant \mathrm{e} \quad 0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{4}$.
   (d) Énoncer l'inégalité des accroissements finis.
   (e) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4^n}$.
   (f) Sachant que $4^5 > 1000$, déterminer un entier $n_1$ à partir duquel $v_n$ est une valeur approchée de e à $10^{-12}$ près.

**Exercice 35.** *Étude d'une autre suite définie par récurrence*

On définit une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par : $u_0 \geqslant 0$ et, pour $n \geqslant 1$ : $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$.

1. Montrer que pour tout entier $n$, $u_n \geqslant \sqrt{n}$.
2. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2}(1+x)$.
   (b) En déduire que pour tout entier $n$, $u_n \leqslant n + \frac{u_0}{2^n}$ puis que la suite $\left(\frac{u_{n-1}}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.
   (c) Montrer que la suite $\left(\frac{u_{n-1}}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0, puis en remarquant que, pour tout entier $n$ non nul, $1 \leqslant \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}}$, en déduire un équivalent de $u_n$ en $+\infty$.
3. On pose $w_n = u_n - \sqrt{n}$. A l'aide d'un développement limité en 0 de $\sqrt{1+x}$, montrer que la suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ admet une limite $L$ que l'on précisera.
4. Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - u_{n-1})$.
   Justifier alors qu'il existe un entier naturel $N_0$ tel que pour tout entier $n$, si $n \geqslant N_0$,
   alors $u_n \geqslant u_{n-1} - \frac{1}{2}$.
   Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $1 + u_n - u_{n-1}$, puis que la suite $(u_n)$ est croissante à partir d'un certain rang.

5. Ecrire en langage Maple une fonction récursive ayant pour nom `Suite` qui calcule le terme d'indice $n$ de la suite lorsque $u_0 = 1$.

**Exercice 36.** *Étude d'une suite*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2+1}$ avec $u_0$ un réel positif quelconque.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
2. Déterminer une expression de $u_n$ en fonction de $n$.
3. En déduire un équivalent simple de $u_n$.

**Exercice 37.** *Équivalent d'une somme*

1. Montrer que les suites $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
2. En déduire la limite et un équivalent simple de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

**Exercice 38.** *Étude d'une suite*

On étudie l'équation suivante :

$$(E)\ \tan(x) = x$$

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que l'équation $(E)$ admet une unique solution $x_n$ dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi[$.
2. Montrer que : $x_n \sim_{+\infty} n\pi$.
3. Montrer que : $\forall x > 0\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
4. Calculer $\arctan(x_n)$.
5. En déduire un développement asymptotique de $x_n$ de la forme : $x_n = n\pi + a + \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
6. De même, en déduire un développement asymptotique de $x_n$ de la forme :

$$x_n = n\pi + a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

**Exercice 39.** *Deux suites définies de manière implicite*

Pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, on définit :

$$f(t) = \exp\left(-\frac{1}{t}\right) \text{ et } g(t) = \frac{f(t)}{t}$$

1. Prouver que $f$ et $g$ sont $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $tf'(t) = g(t)$.
2. Montrer que $g$ est prolongeable par continuité en 0 et que le prolongement (encore noté $g$) est dérivable en 0.
3. Faire un tableau de variations de $g$ sur $\mathbb{R}^+$, en faire un graphe sachant que $\mathrm{e}^{-1} \simeq 0,36$ à $10^{-2}$ près.
4. Soit $n \geq 3$ un entier naturel. On introduit l'équation $(E_n) : f(t) = \frac{t}{n}$, d'inconnue $t \in \mathbb{R}^{+*}$.
   (a) En utilisant la question 3, montrer que $(E_n)$ a une unique solution dans $]0,1[$, que l'on notera $\alpha_n$. On montrerait identiquement (mais ce n'est pas à faire) que $(E_n)$ admet une unique solution dans $]1,+\infty[$, que l'on notera $\beta_n$.
   (b) Montrer que les suites $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ et $(\beta_n)_{n\geq 3}$ sont monotones.
   (c) Est-il possible que l'une des deux suites converge vers une limite réelle $l > 0$ ? En déduire leurs limites.

**Exercice 40.** *Étude d'une somme définie par une somme*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note $l$ sa limite.
2. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $u_n = l + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

**Exercice 41.** *Une suite définie par une intégrale*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}dx$.

1. Calculer $u_0$.
2. Calculer $u_0 + u_1$. En déduire $u_1$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire que la suite $(u_n)$ converge.
4. (a) Pour $n \geq 2$, calculer $u_n + u_{n-1}$.
   (b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. On suppose toujours $n \geq 2$.
   (a) Calculer $\sum_{k=2}^{n} (-1)^k (u_k + u_{k-1})$ en fonction de $u_1$, $u_n$ et $n$.
   (b) En déduire $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k(1-\mathrm{e}^{-k+1})}{k-1}$.