Polynômes

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1. *Calculs avec les polynômes*

- Développer de deux manières différentes $(1 + X)^n(1 + X)^m$.

(a) Montrer que :
$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}.$$

(b) En déduire une expression de la somme :
$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

- Développer de deux manières différentes $(X + 1)^n(X - 1)^n$.

Simplifier la somme :
$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2.$$

- Montrer que
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k (1 - X)^{3n-2k} X^k = (1 - X^3)^n.$$

Exercice 2. *Degré d'un polynôme*

Déterminer les degrés des polynômes suivants :

- $(1 + X)(1 + X^2)(1 + X^4) \dots (1 + X^{2^n})$
- $(X + 1)^n - X^n$
- $(X^2 + 1)^n - 2X^{2n} + (X^2 - 1)^n$

Exercice 3. *Une suite de polynômes*

On considère la suite de polynôme définie par :

$$P_0 = 1, P_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le terme dominant de P_n .
- Montrer que P_n est de même parité que n .
i.e. $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$

Exercice 4. *Calculs avec la dérivée d'un polynôme*

- Calculer de deux manières la dérivée de $(1 + X)^n$.

En déduire la valeur de
$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}.$$

- Calculer de deux manières la dérivée de $X(1 + X)^n$.
Quelles formules trouve-t-on pour $X = 1$ et $X = -1$?

Exercice 5. *Une équation différentielle polynomiale*

Déterminer $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
$$P + P' = \frac{X^n}{n!}.$$

Exercice 6. *Dérivée $n^{\text{ème}}$ d'un polynôme*

- Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ du polynôme $X^n(1 + X)^n$ de deux façons.

2. Montrer que :
$$\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n+k}{k}.$$

3. Montrer que :
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

Exercice 7. *Dérivée $n^{\text{ème}}$ d'une fonction*

On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

- Justifier que la fonction f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1 + x^2)^{n+1}}.$$

On donnera une relation de récurrence vérifiée par la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, déterminer le terme dominant de P_n .
- Étudier la parité de P_n .

Exercice 8. *Somme des k^3*

- Déterminer un polynôme P tel que :
$$P(X) - P(X - 1) = X^3.$$

2. En déduire :
$$\sum_{k=0}^n k^3$$
 en fonction de n .

Exercice 9. Une division euclidienne avec interpolation

Soit P un polynôme.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $X(X-1)(X-2)$ sachant que $P(0) = 1$, $P(1) = 2$ et $P(2) = 1$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $X^2(X-1)$ sachant que $P(0) = 1$, $P'(0) = 2$ et $P(1) = 1$.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)^2(X-2)$ sachant que $P(1) = 1$, $P'(1) = 2$ et $P(2) = 1$.

Exercice 10. Un cas plus général

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ lorsque a et b sont distincts, puis lorsqu'ils sont égaux.

Exercice 11. Formule de Taylor

Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k!} (X-a)^k$.

Soit $m \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer $P_n^{(m)}(a)$ en fonction de m .
2. Soit R le reste de la division euclidienne de P_n par $(X-a)^m$. Pour tout $0 \leq k < m$, déterminer $R^{(k)}(a)$.
3. En déduire une expression de R .

Exercice 12. Quelques divisions euclidiennes

1. Soit $P = (X-2)^{2n} + (X-3)$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par :
 - (a) $(X-1)(X-3)$
 - (b) $(X-1)^3$
 - (c) $(X-1)^2(X+1)$
2. Soit $P = (X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par :
 - (a) $(X-3)(X-2)$
 - (b) $(X-3)^2(X-2)^2$
3. Soit n un entier naturel non nul et θ un nombre réel. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\sin(\theta)X + \cos(\theta))^n$ par $X^2 + 1$.

Exercice 13. Une autre division euclidienne

Soient n et m deux entiers. Soit q et r le reste de division euclidienne de m par n . Exprimer à l'aide de q et de r le reste de la division euclidienne de $X^m - 1$ par $X^n - 1$. 2

Exercice 14. Polynômes 1-périodiques

Déterminer les polynômes P tels que : $P(X) = P(X+1)$.

Exercice 15. Racine d'un polynôme

1. Montrer que 2 est zéro de $P = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$. Quel est son ordre ?
2. Quels sont les autres zéros de P ?
3. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Q divise P .

Exercice 16. Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

1. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants : $X^5 - 1$, $X^6 - 1$, $X^8 + 1$.
2. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants : $X^6 - X^3 - 2$, $X^8 - 5X^4 + 6$, $X^8 - X^4 + 1$

Exercice 17. Divisibilité

1. Soient $A = X^{32} - 1$ et $B = X^2 - \sqrt{2}X + 1$ deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que B divise A .
2. Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que, dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $B = (X^2 + X + 1)^2$ divise le polynôme $A = (X+1)^{6n+1} - X^{6n+1} - 1$. On utilisera les zéros complexes de B et leurs ordres de multiplicité.

Exercice 18.

Soit $P = (X+1)^n - (X-1)^n$ où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P .
2. Étudier la parité de P .
3. Décomposer P en un produit de facteur irréductible de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 19.

On se propose de déterminer tous les polynômes P à coefficients réels vérifiant simultanément les deux conditions : $(X-1)^3 | (P+1)$ et $(X+2)^3 | (P-3)$. (1)

1. (a) On suppose connu un polynôme P_0 solution de (1). Démontrer que le polynôme P satisfait (1) si, et seulement si, le polynôme $P - P_0$ est divisible par $(X-1)^3(X+2)^3$.
(b) Justifier alors la recherche d'une solution de degré inférieur ou égal à 5.
2. Soit P_0 un polynôme de degré au plus égal à 5 vérifiant (1). Que peut-on dire des zéros du polynôme dérivé P'_0 et de leurs ordres de multiplicité ? En déduire l'expression de P'_0 , puis celle de P_0 .

Exercice 20. Une formule

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Factoriser $P = X^{2n} + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
- A l'aide de la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$, établir :
$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2^n}.$$

Exercice 21.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

- Factoriser le polynôme $P = X^{2n} - 2\cos(\theta)X^n + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
- En évaluant le polynôme P en un point bien choisi, en déduire que :
$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin^2\left(\frac{\theta + 2k\pi}{2n}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{4^{n-1}}.$$
- On suppose que $\theta \in]0, \pi[$ et que n est au moins égal à 2. On pose :
$$H_n(\theta) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{2n}\right).$$

Démontrer que $H_n(\theta) = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2n}\right)}$, puis déterminer $\lim_{\theta \rightarrow 0} H_n(\theta)$.

- En déduire la valeur de $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 22.

- A quelle condition nécessaire et suffisante sur les nombres complexes a et b l'équation $X^5 + aX^3 + b = 0$ admet-elle une solution non nulle d'ordre de multiplicité au moins égal à 2 ?
- (a) A quelle condition nécessaire et suffisante sur les nombres complexes a , b et c l'équation $X^3 + aX^2 + bX + c = 0$ admet-elle une solution égale à la somme des deux autres ?
(b) Application numérique : résoudre l'équation $36X^3 - 12X^2 - 5X + 1$.
- A quelle condition nécessaire et suffisante sur le nombre complexe a l'équation $X^4 - 2X^2 + aX + 3 = 0$ admet-elle deux solutions dont le produit est égal à 1 ? Dire alors comment résoudre complètement cette équation (sans effectuer explicitement tous les calculs).

Exercice 23. $a + b + c$ et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Soit a, b et c trois nombres complexes non nuls.

- Montrer que :
$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 0 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \end{array} \right\} \implies |a| = |b| = |c|$$
- On désire prouver le résultat suivant : "si a, b et c sont trois complexes de module 1 vérifiant $a + b + c = 1$, alors nécessairement un de ces trois complexes vaut 1." Supposons que a, b et c soient trois nombres complexes de module 1 tels que $a + b + c = 1$.
(a) Justifier l'égalité : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.
(b) On considère le polynôme P défini par : $P = (X - a)(X - b)(X - c)$. Justifier l'existence d'une constante complexe non nulle α telle que : $P = X^3 - X^2 + \alpha X - \alpha$.
(c) Conclure.

Exercice 24. Equations algébriques

- $$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + xz + yz = 11 \\ xyz = 6 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 9 \end{cases} \quad 5. \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 10 \\ x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0 \\ x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = 34 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x + y = 8 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} x + y + z = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 18 \end{cases} \quad 6. \begin{cases} x + y = a + b \\ x^4 + y^4 = a^4 + b^4 \end{cases}$$

Exercice 25. Extrait : Concours de Mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes (2006)

Soit a un entier naturel. Soit P_a la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, P_a(t) = t^3 - t(a^2 + 2a) + 2$$

Le but de cette partie est de trouver a tel que P_a possède trois racines dans $\mathbb{Z}$. On suppose que a existe. Soient t_1, t_2, t_3 les 3 racines de P_a avec $t_1 \leq t_2 \leq t_3$.

- Que valent $t_1 + t_2 + t_3$ et $t_1 t_2 t_3$?
- Calculer $P_a(0)$ et en déduire que $t_1 < 0$.
- Déduire du 1 et du 2 que $t_1 \leq 0 \leq t_2 \leq t_3 \leq -t_1$ puis les valeurs de t_1, t_2, t_3 .
- Montrer que $P'_a(t_2) = 0$. En déduire la valeur de a .
- Réciproquement, montrer que la valeur de a ainsi trouvée convient bien.