

Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1. Partie positive et négative

Soit f et g , deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On définit les fonctions $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = \sup(-f, 0) = -\inf(f, 0)$.

1. Montrer que : $f^+ = \frac{|f| + f}{2}$ et $f^- = \frac{|f| - f}{2}$.
2. Exprimer $|f|$ et f en fonction de f^+ et de f^- .
3. Montrer que, si g et h sont deux fonctions positives telles que $f = g - h$, alors $f^+ \leq g$ et $f^- \leq h$.
4. Vérifier : $\sup(f^+, f^-) = |f|$ et $\inf(f^+, f^-) = 0$.
5. Montrer : $(f+g)^+ \leq f^+ + g^+$. Peut-il y avoir inégalité stricte dans cette inégalité ?
6. Montrer que : $f \leq g \iff (f^+ \leq g^+ \text{ et } g^- \leq f^-)$.

Exercice 2. Borne sup et borne inf de deux fonctions.

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

Que peut-on dire de $\sup(f, g)$ si f et g sont paires ? impaires ? croissantes ? décroissantes ? périodiques de même période ? périodiques ?

Exercice 3. Borne sup d'une fonction.

Soit f et g , deux fonctions bornées sur I , un intervalle.

1. Prouver que $f + g$ est bornée sur I et $\sup_{x \in I} (f + g)(x) \leq \sup_{x \in I} f(x) + \sup_{x \in I} g(x)$.
2. Déterminer $\sup_{x \in \mathbb{R}} \sin(x)$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} \cos(x)$ et $\sup_{x \in \mathbb{R}} (\sin(x) + \cos(x))$. Conclure.
3. Établir une inégalité similaire avec la notion d'inf.

Exercice 4. Fonctions majorée, minorée, bornée...

Déterminer si les fonctions suivantes sont majorée, minorée ou bornée :

1. $f(x) = \frac{E(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$, sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. $f(x) = \frac{x - E(x)}{x(x+1)}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, sur $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.
3. $f(x) = \frac{x - E(x)}{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
4. $f(x) = aE(bx) - bE(ax)$ où a, b sont des réels strictement positifs sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Fonctions entières.

1. Déterminer $\inf_{x>0} E(x) + E\left(\frac{1}{x}\right)$. Cette fonction admet-elle un minimum ?
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$, une fonction minorée. La fonction f admet-elle un minimum ?

Exercice 6. Fonctions monotones.

Déterminer les fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ qui sont :

1. à la fois croissantes et décroissantes.
2. à la fois monotones et périodiques.

Exercice 7. Monotonie et composition.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

1. On suppose que f une fonction strictement croissante.
Montrer que : $\forall x \in I \quad (f \circ f)(x) = x \iff f(x) = x$.
2. Montrer que si $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante, alors f est décroissante.

Exercice 8. Équations fonctionnelles.

Déterminer les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant les affirmations suivantes :

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) - f(y)| = |x - y|$
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) + f(y)| = |x + y|$
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$
4. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) - f(x-y) = 4xy$
5. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x)f(x^2 - 1) = x$
6. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y^2) = f(x^2) + f(y)$
(Indication : Calculer $f(0)$. Montrer que $f(x) = f(x^2) = f(x^4)$. Calculer : $f((-x^2) + x^2)$. Conclure.)

Exercice 9. Une équation fonctionnelle.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction telle que : $\forall x \in [0, 1] \quad 2x - f(x) \in [0, 1]$ et $f(2x - f(x)) = x$. On définit g par $g(x) = 2x - f(x)$.

1. Montrer que $\forall n \geq 1 \quad g^{[n]}(x) - x = n(g(x) - x)$ où $g^{[n]} = g \circ g \circ \dots \circ g$ (n fois).
2. Majorer $|g(x) - x|$. En déduire une expression de g .
3. En déduire une expression de f .

Exercice 10. Déterminer $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ dans les cas suivants :

$$1. f(x) = \frac{E(x)}{x}, a = +\infty$$

$$2. f(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right), a = 0$$

$$3. f(x) = x^2E\left(\frac{1}{x}\right), a = 0$$

$$4. f(x) = \frac{E\left(\frac{1}{x}\right) - x}{E\left(\frac{1}{x}\right) + x}, a = 0, +\infty$$

$$5. f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} + 1, a = 0$$

$$6. f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x}, a = \pm\infty$$

$$7. f(x) = \sqrt{x + \alpha} - \sqrt{x + \beta}, a = +\infty$$

$$8. f(x) = x \left(\sqrt{x + \sqrt{x + 1}} - \sqrt{x + \sqrt{x - 1}} \right), a = +\infty$$

$$9. f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + x + 1}, a = \pm\infty$$

$$10. f(x) = \left(\frac{x^2}{x - 1} \right)^{\frac{1}{x}}, a = 1, +\infty$$

$$11. f(x) = \frac{\sin(x) - \sqrt{3}\cos(x)}{2\cos(x) - 1}, a = \frac{\pi}{3}$$

$$12. f(x) = \frac{1 - \sin(x) + \cos(x)}{1 - \sin(x) - \cos(x)}, a = \frac{\pi}{2}$$

$$13. f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + (\alpha - 1)x + 3 + 3\alpha}{x^2 + 4x - 3}, a = \pm\infty, 1, 3$$

$$14. f(x) = \frac{\tan(x) - \tan(a)}{x - a}, a \in ?$$

$$15. f(x) = (1 + x^2)^{\frac{1}{x}}, a = \pm\infty, 0$$

$$16. f(x) = \frac{\sqrt{x + 3} - \sqrt{3x + 1}}{\sqrt[3]{x} - 1}, a = 1$$

$$17. f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{\alpha}{x^3 - 1}, a = 1$$

$$18. f(x) = x - \ln|2e^x - 1|, a = \pm\infty$$

$$19. f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \sin\left(\frac{\pi}{x - 1}\right), a = 0, 1$$

Exercice 11. Fonction périodique admettant une limite en $+\infty$.

Soit f une fonction périodique telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Que dire de la fonction f ?

Exercice 12. Préciser si les fonctions f suivantes peuvent se prolonger par continuité en 0.

$$1. f(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$2. f(x) = x^2E\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$3. f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$4. f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$5. f(x) = \frac{1}{1 + x - E(x)}$$

$$6. f(x) = \frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)}$$

$$7. f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$8. f(x) = x^n \exp\left(\frac{1}{x}\right), n \in \mathbb{N}$$

$$9. f(x) = \frac{E(x)}{x}$$

$$10. f(x) = (-1)^{E(\frac{1}{x})}$$

$$11. f(x) = x \left\lfloor x + \frac{1}{x} \right\rfloor$$

$$12. f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

$$13. f(x) = x^{\frac{1}{x}}$$

$$14. f(x) = \frac{x^2(x - E(x))}{|x|}$$

$$15. f(x) = x^3 \exp\left(\frac{\cos(x)}{x}\right)$$

Exercice 13. Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$1. f(x) = 0 \text{ si } x < 0, \text{ et } f(x) = 1 \text{ si } x \geq 0$$

$$2. g(x) = \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } g(0) = 0.$$

$$3. h(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \text{ et } h(0) = 0.$$

$$4. i(x) = x \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ et } i(x) = 0 \text{ si } x \in \mathbb{Q}.$$

$$5. j(x) = x + \sqrt{x - E(x)}$$

$$6. k(x) = x + \sqrt{x + E(x)}$$

Exercice 14. Prolongement par continuité.

La fonction f définie par : $f(x) = x^2 + 3x + \alpha$ si $|x| > 2$ et $f(x) = 2x - 1$ si $|x| < 2$ est-elle prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 15. Étude d'une fonction

On étudie f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = E(x)^2 + (2E(x) + 1)(x - E(x))$.

$$1. \text{ Montrer que, si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \text{ alors } E(-x) = -1 - E(x).$$

$$2. \text{ En déduire que } f \text{ est paire.}$$

$$3. \text{ Montrer que } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.$$

$$4. \text{ Tracer le graphe de } \mathbb{R}.$$

Exercice 16. Fonctions bornées versus limite et continuité

Montrer que les fonctions suivantes sont bornées :

$$1. f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ une fonction continue admettant une limite finie en } +\infty. \text{ Que dire de } f \text{ si la limite en } +\infty \text{ est } +\infty?$$

$$2. f \circ g \text{ et } g \circ f \text{ où } f \text{ est une fonction bornée et } g \text{ est une fonction continue sur } \mathbb{R}.$$

$$3. \text{ une fonction continue et périodique.}$$

Exercice 17. *Plus petite solution d'une équation*

1. Soit f , une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Montrer que, si l'équation $f(x) = 0$ possède une solution, alors elle admet une plus petite solution dans $[a, b]$.
2. Peut-on généraliser au cas d'un intervalle semi-ouvert du type $]a, b]$?
(étudier $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0, 1]$).

Exercice 18. *Morphisme de groupe continue*

1. On cherche à déterminer les endomorphismes de $(\mathbb{R}, +)$ qui sont continues. Soit φ un tel endomorphisme.
 - (a) Montrer : $\forall(n, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \quad \varphi(nx) = n\varphi(x)$.
 - (b) En déduire : $\forall(r, x) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \quad \varphi(rx) = r\varphi(x)$.
 - (c) En déduire une expression de φ .
2. En s'inspirant de ce qui précède, déterminer les fonctions continues g telle que :

$$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x) + g(y)}{2}.$$

Exercice 19. *Équation fonctionnelle et continuité*

Déterminer l'ensemble des fonctions continues vérifiant :

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(\alpha x) = f(x), \alpha \in \mathbb{R}$
2. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x^2) = -f(x)$
3. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x^2) = f(x)$
4. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x+1) = f(x)$

Exercice 20. *Encore une équation fonctionnelle.*

On cherche à déterminer les fonctions continues f telles que :

$$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y))$$

Soit f une telle fonction.

1. Déterminer $f(0)$.
2. Étudier la parité de f .
3. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $f(nx)$ en fonction de $f(x)$ et de n .
4. Soit $r \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}$. En déduire $f(rx)$ en fonction de $f(x)$ et de r .
5. Déterminer une expression de f à l'aide $f(1)$.
6. Conclure.

Exercice 21. *Équations fonctionnelles.*

1. On cherche à déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}$, continues en 0 et telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^- \quad f(x) = f\left(\frac{x}{1-x}\right) \quad (*)$$
 - (a) Donner une (ou plusieurs) solutions de $(*)$.
 - (b) Montrer que $\mathbb{R}^-$ est stable par la fonction g définie par $g(x) = \frac{x}{1-x}$.
 - (c) Pour $x \in \mathbb{R}^-$, déterminer $g^{\circ n}(x) = \underbrace{(g \circ g \circ \dots \circ g)}_{n \text{ fois}}(x)$.
 - (d) Pour $x \in \mathbb{R}^-$, que dire de $f(g^{\circ n}(x))$? En déduire les solutions de l'équation $(*)$.
2. Soit f une fonction continue définie sur $[0, 1]$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$f^{\circ n}(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n \text{ fois}}(x) = x.$$
 - (a) Montrer que f est injective.
 - (b) En déduire que f est strictement monotone.
 - (c) On suppose $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que $f = \text{Id}$.

Exercice 22. *Existence de solutions d'équations.*

Montrer que les équations suivantes admettent une solution.

1. $f(x) = 0$ où f est un polynôme de degré impair.
2. $x^{18} - 16x^3 - 2 = 0$
3. $x^2 \cos(x) + x \sin(x) + 1 = 0$
4. $\exp(-x) = x$

Exercice 23. *Un théorème de point fixe et plus.*

Soit $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$, une fonction continue.

1. Montrer que f a un point fixe.
2. Montrer qu'il existe c dans $[0, 1]$ tel que $f(c) = \sqrt{c}$.
3. On suppose que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$,

$$f\left(c + \frac{1}{2}\right) - f(c) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 24. *Une énigme ?*

Un marcheur a parcouru une distance d en un temps T . Montrer que le marcheur a nécessairement parcouru pendant un intervalle de temps $\frac{T}{2}$ une distance $\frac{d}{2}$.

Exercice 25. *Température aux antipodes.*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue et T -périodique ($T > 0$).

Montrer qu'il existe un $c \in \mathbb{R}$ tel que : $f\left(c + \frac{T}{2}\right) = f(c)$.

Application : montrer qu'il existe, sur la Terre, deux point antipodaux où la température est la même.

Exercice 26. *Points fixes.*

Montrer que les fonctions suivantes admettent un point fixe :

1. une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}$
2. une fonction continue f telle que $f \circ f$ admette un point fixe.
3. $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue et bornée.
4. $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue admettant une limite finie.
5. $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = L < 1$

Exercice 27. $f(c) = g(c)$

Montrer dans les cas suivants qu'il existe c tel que $f(c) = g(c)$:

1. $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues et telles que : $(f(0) - g(0))(f(1) - g(1)) \leq 0$
2. $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues et telles que : $f(a) = g(b)$ et $f(b) = g(a)$
3. $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continues et telles que : $g \circ f = f \circ g$

Exercice 28. *Suite définie implicitement.*

Pour tout entier naturel $n \geq 0$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^3 + nx + n$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une et une seule solution α_n sur $\mathbb{R}$.
2. Comparer α_n à -1 et 0 . Déterminer le signe de $f_{n+1}(\alpha_n)$: en déduire la monotonie de la suite (α_n) .

3. Démontrer que la suite (α_n) est convergente de limite -1 .

4. Montrer que $\alpha_n = -1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, puis $\alpha_n = -1 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 29. *Fonctions lipschitziennes.*

1. Montrer que les fonctions affines (*i.e.* de la forme $f(x) = ax + b$) sont des fonctions lipschitziennes.
2. Les fonctions polynomiales de degré 2 sont-elles lipschitziennes ?
3. Les fonctions lipschitziennes définie sur un intervalle I forment-elles un sous-groupe de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$?
4. Les fonctions lipschitziennes définie sur un intervalle I forment-elles un sous-anneau de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$?
5. Si f est k -lipschitzienne et $\lambda \in \mathbb{R}$, que dire de λf ?
6. Montrer que, si f est lipschitzienne sur un intervalle I , alors $|f|$ l'est aussi. Réciproque ?
7. Que dire de la composée de deux fonctions lipschitziennes ?
8. On suppose que : $\exists c \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I, g(x) \geq c > 0$ et que g est k -lipschitzienne. Que dire de $\frac{1}{g}$?

Exercice 30. *Fonction contractante.*

Soit f une fonction contractante, *i.e.* une fonction k -lipschitzienne avec $k < 1$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $f([-M, M]) \subset [-M, M]$.
2. En déduire que f admet un point fixe et qu'il est unique.
3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par récurrence par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente et évaluer à l'aide de k sa vitesse de convergence (*i.e.* si l est la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, majorer $|u_n - l|$ en fonction de k et de l).