Dérivation

Exercice 1. *Entrainement au calcul de dérivée*

Afin de vous entrainer aux calculs de dérivée, démontrer les formule suivantes :

1. $\left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)' = \frac{2}{1-x^2}$
2. $\left(e^{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{xe^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}$
3. $(\cos(3x+\sqrt{x}))' = -\sin(3x+\sqrt{x})\left(3+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$
4. $\left((2\sin^2(x)+1)^2\right)' = 8\sin(x)\cos(x)(2\sin^2(x)+1)$
5. $\left(\frac{1}{\sqrt{3x^2-4x+1}}\right)' = \frac{2-3x}{(3x^2-4x+1)^{\frac{3}{2}}}$
6. $(\ln(\ln(x)))' = \frac{1}{x\ln(x)}$
7. $(2^x)' = \ln(2)2^x$
8. $(x^x)' = x^x(\ln(x)+1)$
9. $\left(x^{\frac{1}{x}}\right)' = \frac{1-\ln(x)}{x^2}x^{\frac{1}{x}}$
10. $\left((x^2-1)\right)^7 = 14x(x^2-1)^6$
11. $\left(\tan^7(2x)\right)' = 14\tan^6(2x)(1+\tan^2(2x))$
12. $\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

Exercice 2. *Calcul de dérivée*

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes. Calculer leur dérivée. Au point où la dérivée n'est pas définie, on étudiera la dérivabilité à droite et à gauche.

1. $f(x) = \sqrt[5]{x^2-1}$
2. $f(x) = \sqrt{\frac{x^3-1}{x}}$
3. $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$
4. $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} & \end{cases}$
5. $f(x) = 1-\cos(\sqrt{|x|})$
6. $f(x) = \frac{|x|}{(1+|1-x^2|)^3}$
7. $f(x) = \sqrt{|x\sin(x)|}$
8. $f(x) = \sqrt[3]{1-\sin^3(x)}$

Exercice 3. *Prolongement de fonction par continuité*

Vérifier que les fonctions définies par les expressions suivantes se prolongent par continuité en 0. Préciser si ainsi prolongée, elles sont dérivables en 0 ou non. Enfin, le cas échéant, déterminer si elles sont de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 on non.

1. $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$
2. $f(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$
3. $f(x) = x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)$
4. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$
5. $f(x) = \frac{x}{\ln(|x|)}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

Exercice 4. *Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$*

Montrer que les fonctions définies par les expressions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^2$.

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} \cos(\sqrt{-x}) & \text{si } x < 0 \\ \text{ch}(\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{sinon} \end{cases}$
   Est-elle dérivable trois fois ?

Exercice 5. *Dérivabilité versus parité et périodicité*

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. (a) Montrer que si f est paire, alors f' est impaire.
   (b) Montrer que si f est impaire, alors f' est paire.
   (c) Discuter de la réciproque de ces résultats.
2. Montrer que si f est T-périodique, alors f' est T-périodique.

Exercice 6. *Réciproque d'une fonction dérivable*

On définit la fonction f par $f(x) = \frac{x\ln(x)}{x-1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier les prolongements par continuité de f. (on note encore f le prolongement maximal de f)
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
4. Démontrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme (une bijection $\mathcal{C}^1$ dont la réciproque est $\mathcal{C}^1$) de $\mathbb{R}^{+*}$ sur un intervalle I que l'on précisera.
5. Déterminer le développement limité d'ordre 2 en 1 de la bijection réciproque f^{-1}.

Exercice 7. *Réciproque d'une fonction dérivable*

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + \sin(x)$.

1. Etablir que f est une bijection entre deux intervalles I et J de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.
2. Démontrer que la bijection réciproque f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J.
3. Déterminer le développement limité d'ordre 3 en 0 de f^{-1}.

Exercice 8. *Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la dérivée $n^{\text{ème}}$ des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = (x^2 + 2x + 3)e^{2x}$
2. $f(x) = (x^3 + x^2 + 1)e^{-x}$
3. $f(x) = x^k$ où $k \in \mathbb{Z}$ (en distinguant les cas $k \geq 0$ et $k > 0$, on exprimera la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f avec la suite factorielle).
4. $f(x) = x^2 \ln(x)$
5. $f(x) = \dfrac{2x+3}{(x-1)^2(x+1)}$ Écrire $f(x)$ sous la forme $\dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1}$.
6. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$ Écrire $f(x)$ sous la forme $\dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-2}$.
7. $f(x) = \sin(3x)\cos(2x)$ (linéariser)
8. $f(x) = (\sin(x))^3$ (linéariser)
9. $f(x) = \sin^4(x)\cos^2(x)$ (linéariser)

Exercice 9. *Étude d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est dérivable deux fois en 0.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme P_n tel que pour tout $t < 0$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{\frac{1}{x}} \quad (\mathcal{H}_n)$$

   On précisera les valeurs de P_1 et P_2 et une relation de récurrence entre P_n, P_n' et P_{n+1}.
3. Montrer que la fonction f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 10. *Inégalités*

Démontrer, en utilisant le théorème des accroissements finis, les propriétés suivantes :

1. $\forall x > 0 \quad \sin(x) < x$
2. $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\quad \tan(x) > x$
3. $\forall x > 0 \quad \arctan(x) > \dfrac{x}{1+x^2}$

Exercice 11. *Calcul d'une limite*

On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, il existe $c \in]x, x+1[$ tel que :

$$f(x) - f(x+1) = \frac{1}{c^2} e^{\frac{1}{c}}$$

2. En déduire $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^2 \left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - \exp\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)$.

Exercice 12. *Théorème des accroissements finis généralisé*

Soit $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1. Montrer que : $\exists c \in]a, b[\quad (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.
2. On suppose que $f(a) = g(a) = 0$ et $\forall t \in]a, b[\ g'(t) \neq 0$.

   En déduire que : $\lim\limits_{t \longrightarrow a} \dfrac{f'(t)}{g'(t)} = l \in \mathbb{R} \implies \lim\limits_{t \longrightarrow a} \dfrac{f(t)}{g(t)} = l$

Exercice 13. *Généralisation du théorème de Rolle à un intervalle non borné*

Soient a un nombre réel et une application continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$, telle que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = f(a)$.

1. On définit la fonction g par : $g(x) = f\left(a + \dfrac{x}{1-x}\right)$ si $x \in [0, 1[$ et $g(1) = f(a)$.

   Montrer que g est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$.
2. En déduire qu'il existe un élément $c \in]a, +\infty[$ de vérifiant $f'(c) = 0$.

Exercice 14. *Majoration du nombre de solutions d'une équations*

Soit P un polynôme à coefficients réels, de degré n. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - P(x)$.

1. f est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer le nombre d'annulations de $f^{(n+1)}$.
2. Pour $0 \leq k \leq n$, majorer, en fonction de k, le nombre maximum de solutions que l'équation $f^{(k)}(x) = 0$.
3. En déduire que l'équation $P(x) = e^x$ n'admet qu'un nombre fini de solutions dans $\mathbb{R}$.

Exercice 15. *Majoration du nombre de solutions d'une équations*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$.

1. On suppose que P admet n racines distinctes.
   Montrer que P' admet $n-1$ racines distinctes et placer les par rapport à celles de P.
2. Que dire si les n racines ne sont pas distinctes ?

Exercice 16. *Polynômes de Legendre*

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note : $P_n = ((X^2-1)^n)^{(n)}$.

1. Déterminer le terme dominant de P_n.
2. (a) Déterminer les racines de $Q_n = (X^2-1)^n$ et préciser leurs multiplicités.
   (b) En déduire que le polynôme admet n racines distinctes toutes situés dans l'intervalle $]-1,1[$.
   Indication : Déterminer le nombre de racines de $Q_n^{(k)}$ situés sur $]-1,1[$ pour $0 \leq k \leq n$.

Exercice 17. *Étude de* $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$

1. Soit $n \geq 2$. Montrer que $\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)} < \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) < \dfrac{1}{n\ln(n)}$.
2. En déduire $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$ et déterminer un équivalent de $\displaystyle\left(\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}\right)_{n\geq 3}$

Exercice 18. *Étude de* $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^3}$

1. Montrer que, pour $n \geq 2$, $\dfrac{1}{n^3} < \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{(n-1)^2} - \dfrac{1}{n^2}\right)$.
2. En déduire que la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}\right)_{n\geq 3}$ converge et donner un majorant de sa limite.

Exercice 19. *Étude de la convergence d'une suite récurrente grâce au théorème des accroissements finis*

On se propose d'étudier la suite $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \cos(u_n)$.

1. Démontrer que l'équation $\cos(x) = x$ admet une unique solution réelle α qui appartient à l'intervalle $I = \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$.
2. Démontrer que I est stable par la fonction cos et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
3. Déterminer un nombre réel $k \in]0,1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$.
4. En déduire que la suite U est convergente et déterminer sa limite.
5. En utilisant l'égalité des accroissements finis, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et u_{n+1} encadrent α.
6. En calculant les termes de la suite U jusqu'à un rang convenable, déduire de ce qui précède une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

Exercice 20. *Concavité de* ln *et conséquences...*

1. Montrer que la fonction $(x \mapsto -\ln(x))$ est convexe.
2. En déduire les inégalités suivante :
   (a) $\forall m \in \mathbb{N}\ m! \leq \left(\dfrac{m+1}{2}\right)^m$.
   (b) $\forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}^{+*})^3, a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$ et $(a+b+c)^3 \geq 27abc$.
   (c) $\forall (x_i)_{i=1}^n \in (\mathbb{R}^{+*})^n \quad \dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + \cdots + \dfrac{x_n}{x_1} \geq n$.

Exercice 21. *Quelques fonctions convexes et inégalités...*

1. (a) Montrer que la fonction suivante est convexe : $f : \left\{\begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\ln(\ln(x)) \end{array}\right.$
   (b) En déduire que : $\forall (x,y) \in]1,+\infty[^2 \quad \ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$.
2. (a) Montrer que la fonction suivante est convexe : $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\ln(x) \end{array}\right.$
   (b) En déduire que : $\forall (x,y,a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^4 \quad x\ln\left(\dfrac{x}{a}\right) + y\ln\left(\dfrac{y}{b}\right) \geq (x+y)\ln\left(\dfrac{x+y}{a+b}\right)$.
3. (a) Montrer que la fonction suivante est convexe : $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+\mathrm{e}^x) \end{array}\right.$
   (b) En déduire que : $\forall (x_k)_{k=1}^n \in (\mathbb{R}^{+*})^n \quad 1 + \sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k} \leq \prod_{k=1}^{n} \sqrt[n]{1+x_k}$

Exercice 22. *Fonction convexe et majorée*

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, convexe et majorée. Montrer que f est constante.