

Algèbre linéaire : Espaces vectoriels

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1. *Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$*

Pour chacun des ensembles suivants, préciser si ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Le cas échéant, donner une famille génératrice simple.

$$1. E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / -x + 3y + z = 0 \right\}$$

$$2. E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \right\} \quad 4. E_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / xyz = 0 \right\}$$

$$3. E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - z = 1 \right\} \quad 5. E_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 / xy = zt \right\}$$

$$6. E_6 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / -x + 3y + z = 0 \text{ ou } 2x + y - z = 0 \right\}$$

$$7. E_7 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - 4z = 0 \text{ ou } x - y + 3z = 0 \right\}$$

$$8. E_8 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 / x + y - 2z - t = 0 \text{ et } 3x - y + 4z + 2t = 0 \right\}$$

$$9. E_9 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ z \\ x+y+z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$10. E_{10} = \left\{ \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ x+4y+z \\ y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$11. E_{11} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 / x + 2y + t = 0 \text{ et } x + y + z + 2t = 0 \right\}$$

$$12. E_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + 2t = 0 \text{ et } x + 3y + 2z = 0 \text{ et } 2y + z + t = 0 \right\}$$

Exercice 2. *Étude de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$*

$$\text{Soient } E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + 3z = 0 \right\} \text{ et } F = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et préciser une famille génératrice de E .

2. Pourquoi $E \cap F$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

3. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / ax + by + cz = 0 \right\}$.

4. En déduire une famille génératrice de $E \cap F$.

Exercice 3. *Étude de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$*

$$\text{Soient } E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 / x + 2y + 3z + t = 0 \text{ et } 3x + y + z - t = 0 \right\}$$

$$\text{et } F = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right).$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et préciser une famille génératrice de E .

2. Pourquoi $E \cap F$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$?

3. Déterminer $(a_1, b_1, c_1, d_1) \in \mathbb{R}^4$ et $(a_2, b_2, c_2, d_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 / a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = 0 \text{ et } a_2x + b_2y + c_2z + d_2t = 0 \right\}$.

4. En déduire une famille génératrice de $E \cap F$.

Exercice 4. Étude de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$

Soient $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = 0 \text{ et } 4x + 3y + 2z + t = 0 \right\}$
et $F = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

- Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et préciser une famille génératrice de E .
- Pourquoi $E \cap F$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$?
- Déterminer $(a_1, b_1, c_1, d_1) \in \mathbb{R}^4$ et $(a_2, b_2, c_2, d_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 / a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = 0 \text{ et } a_2x + b_2y + c_2z + d_2t = 0 \right\}$.
- En déduire que $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

Exercice 5. Polynômes

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ? Pour chaque espace vectoriel rencontré, donner une famille génératrice simple.

- $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / XP' - P = 0\}$
- $F = \{P \in \mathbb{R}_5[X] / P(0) = 1\}$
- $G = \{P \in \mathbb{R}_4[X] / P'(0) = 0\}$
- $H = \{P \in \mathbb{R}[X] / \deg(P) = 3\}$
- $I = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / P(1) + 3P(2) = 0\}$
- $J = \{P \in \mathbb{R}_5[X] / P(-1) = P'(-1) = 0\}$

Exercice 6. Fonctions

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Préciser si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$

- $E = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) / \int_0^1 f(t)dt = \alpha\}$
- F , l'ensemble des fonctions paires
- G , l'ensemble des fonctions périodiques
- $H = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) / \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \alpha\}$
- $I = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) / f'' - f = 0\}$
- $J = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) / \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \forall t \in \mathbb{R} f(t) = ae^t + b \sin(t) + c \arctan(t) + \alpha\}$

Exercice 7. Solutions paires d'une équation différentielle

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) / f'' + f = 0\}$ et $\mathcal{P}$ des fonctions paires de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

- Montrer que E et $\mathcal{P}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
- Rappeler pourquoi $F = E \cap \mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel.
- Montrer que F est engendré par un vecteur que l'on déterminera.

Exercice 8. Sous-espaces vectoriels de suites

Soit $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N} u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\}$
et $G = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N} u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n\}$.

- Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels engendrés par deux vecteurs.
- Montrer que $F \cap G$ est engendré par un vecteur.

Exercice 9. Sous-espace vectoriel engendré

Montrer que, dans $\mathbb{R}^3$, on a les relations suivantes :

- $\text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \mathbb{R}^3$.
- $\text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$.
- $\text{vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \right)$.
- $\text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$.

Exercice 10. Fonctions trigonométriques

On définit la fonction d par : $\forall x \in \mathbb{R} d(x) = \cos(2x)$. Puis on définit le sous-espace vectoriel F de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ par $F = \text{vect}(1, d)$. Démontrer que $F = \text{vect}(\sin^2, \cos^2)$.

Exercice 11. Somme de sous-espaces vectoriels

Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x - y + 3z = 0 \right\}$ et $F = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Préciser une famille génératrice de E .
2. Déterminer $E \cap F$.
3. Montrer de deux façons différentes que : $\mathbb{R}^3 = E + F$.

Indication : La première façon utilisera la famille génératrice de E et la seconde ne l'utilisera pas.

4. Que pouvez-vous en déduire sur E et F ?

Exercice 12. Somme de sous-espaces vectoriels

Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 / x + y + 3z - t = 0 \text{ et } x - y + z + 3t = 0 \right\}$
 et $F = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Préciser une famille génératrice de E .
2. Déterminer $E \cap F$.
3. Montrer de deux façons différentes que : $\mathbb{R}^4 = E + F$.

Indication : La première façon utilisera la famille génératrice de E et la seconde ne l'utilisera pas.

4. Que pouvez-vous en déduire sur E et F ?

Exercice 13. Somme et intersection d'espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et A, B, C trois sous-espaces vectoriels de E vérifiant les trois conditions :

$$A + B = A + C \quad A \cap B = A \cap C \quad B \subset C$$

1. Démontrer que $B = C$.
2. E désignant ici le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on pose : $A = \{(x, 2x) / x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{(2x, 3x) / x \in \mathbb{R}\}$ et $C = \{(0, x) / x \in \mathbb{R}\}$. Représenter graphiquement A, B, C . Dans ce cas comparer $A + B, A + C, A \cap C, A \cap B, B$ et C .

3. A l'aide de contre-exemples analogues au précédent, démontrer que la conclusion de la question 1 n'est plus assurée dès lors que l'une des trois hypothèses n'est plus satisfaite.

Exercice 14. Sous-espaces vectoriels de suites

On pose $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0\}$,
 $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} + u_n = 0\}$ et $G = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} - 2u_n = 0\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel, puis que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. Que peut-on dire de l'ensemble $F \cap G$? Le déterminer complètement.
3. Vérifier que F et G sont engendrés par un vecteur et E par deux vecteurs.
4. Vérifier que $E = F \oplus G$.

Exercice 15. Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que : $E = F + G$. Soit H un supplémentaire de $F \cap G$ dans F . Montrer que G et H sont supplémentaires dans E , i.e. $E = G \oplus H$.

Exercice 16. Exemples de sous-espace affines

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces affines et le cas échéant préciser leurs directions.

1. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / xy = zt\}$
2. $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / xy \geq 0\}$
3. $H = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(1) = 1\}$
4. $I = \{P \in \mathbb{R}[X] / \deg(P) = 3\}$
5. $J = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N} \ \sum_{k=n}^{2n} u_k = \alpha\}$
6. $K = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) / \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \alpha\}$
7. $L = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) / \forall n \in \mathbb{N} \ f(n) = \alpha\}$
8. $M = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \text{ et } u_0 = 1\}$

Exercice 17. Soit F et G deux sous-espaces affines de E

On suppose que : $E = \vec{F} + \vec{G}$.

1. Montrer que $F \cap G \neq \emptyset$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que cette intersection soit réduite à un point.