Algèbre linéaire : Familles de vecteurs - Dimension

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1. *Familles libres, familles liées...*

Déterminer si les familles de vecteurs suivants sont libres ou liées.

1. $\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right)$
2. $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)$
3. $\left(\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ où $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$
4. $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}\right)$
5. $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\2\\13\end{pmatrix}\right)$
6. $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$
7. $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\6\\3\\4\end{pmatrix}\right)$

Exercice 2. *Familles libres*

Soient E un espace vectoriel et $(u_1,u_2,u_3)\in E^3$ une famille libre. Soit $v_1=u_1+u_2$, $v_2=u_2+u_3$ et $v_3=u_1+u_3$. Montrer que (v_1,v_2,v_3) est une famille libre.

Exercice 3. *Transformations élémentaires*

Soit $(u_i)_{i=1}^n\in E^n$ où $n\in\mathbb{N}^*$ et E est un espace vectoriel. Soit $\lambda\in\mathbb{K}$ et $(i_0,j_0)\in[\![1,n]\!]$ avec $i_0\neq j_0$.

1. On définit la famille $(v_i)_{i=1}^n$ par : $\forall i\in[\![1,n]\!]\setminus\{i_0\}$ $v_i=u_i$ et $v_{i_0}=\lambda u_{i_0}$. Montrer que si $\lambda\neq 0$, alors la famille $(u_i)_{i=1}^n$ est libre si, et seulement si la famille $(v_i)_{i=1}^n$ est libre.
2. On définit la famille $(v_i)_{i=1}^n$ par : $\forall i\in[\![1,n]\!]\setminus\{i_0\}$ $v_i=u_i$ et $v_{i_0}=\lambda u_{i_0}+\lambda u_{j_0}$. Montrer que la famille $(u_i)_{i=1}^n$ est libre si, et seulement si la famille $(v_i)_{i=1}^n$ est libre.

Exercice 4. *Famille échelonnée*

Soit $(u_k)_{k=1}^n=(x_{i,k})_{\substack{i=1\dots n\\k=1\dots n}}$ une famille de k vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$.

On note $i_k=\min\{i\in[\![1,n]\!]\ /\ x_{i,k}\neq 0\}$. On suppose que la suite finie $(i_k)_{k=1}^n$ est strictement croissante.

1. Donner une représentation des vecteurs $(u_k)_{k=1}^n$.
2. Montrer que la famille $(u_k)_{k=1}^n$ est libre.

Exercice 5. *Famille de polynômes échelonnée en degré*

Soit $(P_k)_{k=1}^n$ une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ tel que $(\deg(P_k))_{k=1}^n$ soit une suite finie strictement croissante. Montrer que la famille $(P_k)_{k=1}^n$ est libre.
Indication : On pourra faire une récurrence sur n et étudier les termes de plus haut degré.

Exercice 6. *Famille de fonctions*

Soit $(f_k)_{k=1}^n\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ où $n\in\mathbb{N}^*$.

1. On suppose qu'il existe $(x_j)_{j=1}^n$ une famille de points distincts de $\mathbb{R}$ telle que la famille $\left(\begin{pmatrix}f_k(x_1)\\\vdots\\f_k(x_n)\end{pmatrix}\right)_{k=1}^n$ soit libre. Que dire de la famille $(f_k)_{k=1}^n$?
2. Énoncer la réciproque du résultat démontré à la question précédente et démontrer la (on fera une récurrence sur n).

Exercice 7. *Familles libres - Familles liées*

Préciser si les familles (f_1,f_2,f_3) suivantes sont libres ou liées.

1. $f_1(x)=\cos^2(x)$, $f_2(x)=\cos(2x)$, $f_3(x)=1$
2. $f_1(x)=1$, $f_2(x)=\cos(x)$, $f_3(x)=\sin(x)$
3. $f_1(x)=\sin(x)$,$f_2(x)=\sin(2x)$, $f_3(x)=\sin(3x)$
4. $f_1(x)=|x-1|$, $f_2(x)=|x-2|$, $f_3(x)=|x-3|$

Indication : On pourra utiliser l'exercice 6.

Exercice 8. *Une famille libre*

Soient $n\in\mathbb{N}$ et $\mathcal{B}=(\sin(x),x\sin(x),\dots,x^n\sin(x),\cos(x),x\cos(x),\dots,x^n\cos(x))$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre.
Indication : On pourra utiliser l'exercice 6.

Exercice 9. *Familles génératrices, bases...*

Déterminer si les familles de vecteurs suivantes sont génératrices ou non. On précisera également si elles forment une base ou non. Le cas échant, on précisera les coordonnées dans cette nouvelle base des vecteurs de la base canonique.

1. $\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}\right)$
2. $\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right)$
3. $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b\\c\\1\end{pmatrix}\right)$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$
4. $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\right)$
5. $\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\-3\\17\end{pmatrix}\right)$
6. $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\1\\1\end{pmatrix}\right)$
7. $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\6\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\3\end{pmatrix}\right)$

Exercice 10. *Transformations élémentaires*

Soit $(u_i)_{i=1}^n \in E^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et E est un espace vectoriel. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(i_0, j_0) \in [\![1,n]\!]$ avec $i_0 \neq j_0$.

1. On définit la famille $(v_i)_{i=1}^n$ par : $\forall i \in [\![1,n]\!] \setminus \{i_0\}$ $v_i = u_i$ et $v_{i_0} = \lambda u_{i_0}$. Montrer que si $\lambda \neq 0$, alors la famille $(u_i)_{i=1}^n$ est génératrice si, et seulement si la famille $(v_i)_{i=1}^n$ est génératrice.
2. On définit la famille $(v_i)_{i=1}^n$ par : $\forall i \in [\![1,n]\!] \setminus \{i_0\}$ $v_i = u_i$ et $v_{i_0} = \lambda u_{i_0} + \lambda u_{j_0}$. Montrer que la famille $(u_i)_{i=1}^n$ est génératrice si, et seulement si la famille $(v_i)_{i=1}^n$ est génératrice.

Exercice 11. *Bases d'un sous-espace engendré...*

Donner une base des espaces suivants et préciser leur dimension. On précisera également les coordonnées des vecteurs de leur famille génératrice dans cette base.

1. $\operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\6\\12\end{pmatrix}\right)$
2. $\operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}\right)$
3. $\operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\4\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\5\\13\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$

Exercice 12. *Base d'espace vectoriel défini de manière implicite*

Démontrer que les espaces suivants sont des espaces vectoriels, donner en une base et préciser leur dimension :

1. $E = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y+z=0 \right\}$
2. $F = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ / \ x+y+z+t=0 \text{ et } x+2y+3z+4t=0 \right\}$

Exercice 13. *Une base de $\mathbb{R}_3[X]$*

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On pose $P_1 = (X-2)(X-3)(X-4)$, $P_2 = (X-1)(X-3)(X-4)$, $P_3 = (X-1)(X-2)(X-4)$ et $P_4 = (X-1)(X-2)(X-3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ est une base de E.
2. Soit φ l'application linéaire définie sur E par $\varphi(P) = \begin{pmatrix}P(1)\\P(2)\\P(3)\\P(4)\end{pmatrix}$. Montrer que φ réalise un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^4$.
   Indication : On calculera les images des polynômes de la base $\mathcal{B}$.
3. Donner les coordonnées de $P = X^3 + X^2 + 3$ dans cette base $\mathcal{B}$.

Exercice 14. *Généralisation de l'exercice 13*

Soit n un entier naturel non nul. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Enfin, soit $(a_i)_{i=1}^{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ une famille de $n+1$ réels distincts. On pose, pour $i \in [\![1, n+1]\!]$:

$$P_k = \prod_{i=1, i\neq k}^{n} X - a_i = (X-a_1)\dots(X-a_{i-1})(X-a_{i+1})\dots(X-a_n)$$

Montrer que $(P_k)_{k=1}^{n+1}$ est une base de E. Soit $P \in E$. Donner les coordonnées de P dans cette base.

Exercice 15. *Familles de polynômes*

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $\mathcal{F}_1 = (P_k)_{k=0}^n \in (\mathbb{K}[X])^{n+1}$ la famille de polynômes définis pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ par : $P_k = \sum_{j=0}^{k} X^j$. Montrer que la famille $\mathcal{F}_1$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Soit $\mathcal{F}_2 = (P_k)_{k=0}^n \in (\mathbb{K}[X])^{n+1}$ une famille de polynômes telle que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a : $\deg(P_k) = k$. Montrer que la famille $\mathcal{F}_2$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 16. *Espace de suite*

On considère $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 8u_n\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Déterminer une base de E et en déduire la dimension de E.
3. Donner les coordonnées d'une suite $u \in E$ dans cette base en fonction de u_0 et u_1.

Exercice 17. *Base et dimension d'un noyau*

Déterminer une base du noyau des applications suivantes et préciser leur dimension :

1. $\varphi : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), \varphi(f) = f'' + 4f$
2. $\varphi : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), \varphi(f) = f'' + 2f' + f$
3. $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \varphi(u) = v$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$
4. $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \varphi(u) = v$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$

Exercice 18. *Une base et un isomorphisme (Mines Albi, Douai...1999 - problème 2 (partie I))*

On note $p : x \mapsto \mathrm{e}^x = \exp(x)$, $q : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} = \exp(2x)$ et $r : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2} = \exp(x^2)$. On note $\mathcal{B} = (p, q, r)$ et $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{B}$. On se propose de prouver que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{E}$, au moyen de diverses méthodes. De par la définition de $\mathcal{E}$, il nous suffit de montrer que la famille $\mathcal{B}$ est libre ; soit donc a, b et c trois réels tels que $ap + bq + cr = \mathbf{0}$ (où $\mathbf{0}$ désigne la fonction nulle).

1. L'étudiant Antoine a évalué l'expression $(ap + bq + cr)(x)$ pour $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$. Suivez sa démarche en l'expliquant, et concluez.
2. Antoine a utilisé une propriété du nombre e ; laquelle ? Sauriez-vous justifier cette propriété autrement que par un argument du genre « *tout le monde sait bien que* $\mathrm{e} \approx 2.71828$ » ?
3. L'étudiant Nicolas a observé le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de l'application $ap + bq + cr$. Faites comme lui et concluez.
4. L'étudiant Luc a eu une autre idée : il s'est intéressé au comportement de chacune des trois fonctions p, q, r au voisinage de $+\infty$. Reconstituez sa méthode et concluez.
5. Au fait : quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?

   On note ψ l'application qui, à $f \in \mathcal{E}$, associe le triplet de réels $\begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ f(1) \end{pmatrix}$.
6. Prouvez que ψ est un isomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{E}$ sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
7. Soit $f = ap + bq + cr$ un élément de $\mathcal{E}$. Exprimez a, b et c en fonction de $f(0)$, $f'(0)$ et $f(1)$.

Exercice 19. *Dimensions de sous-espaces vectoriels*

Soient $n \in \mathbb{N}$ et E un espace vectoriel de dimension n. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que : $\dim(F) + \dim(G) > n$.
Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 20. *Dimensions de sous-espaces vectoriels*

Dans $\mathbb{R}^4$, on note : $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $F = \mathrm{vect}(u, v, w)$ et $G = \mathrm{vect}(x, y)$. Préciser $\dim(F)$, $\dim(G)$, $\dim(F + G)$ et $\dim(F \cap G)$.

Exercice 21. *Famille libre*

Soient E un espace vectoriel et $(u_i)_{i=1}^n$ une famille de vecteurs de E.
Soit $(v_i)_{i=1}^n$ une famille de combinaisons linéaires des vecteurs $(u_i)_{i=1}^n$.
Montrer que, si la famille $(v_i)_{i=1}^n$ est libre, alors la famille $(u_i)_{i=1}^n$ est libre.

Exercice 22. *Base et dimension de l'image*

Déterminer une base de l'image et du noyau des applications linéaires suivantes et préciser leur dimension. On discutera a priori et a posteriori des résultats demandés.

1. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ x + z \\ y - z \end{pmatrix}$
2. $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - 2z \\ x + 2y - 3z \\ x - y \end{pmatrix}$
3. $h : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $h\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + z + t \\ x + 2z - t \\ x + y + 3z - t \end{pmatrix}$
4. $i : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $i\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z + t \\ x - y + z - t \\ x + 3y + z + 3t \end{pmatrix}$
5. $j : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ telle que $j\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x - y + z \\ x + 2y + z \\ x - y - z \end{pmatrix}$

6. $k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ telle que $k\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y+z \\ x+3y+z \\ x+5y+z \end{pmatrix}$

Exercice 23. *Suite récurrente linéaire d'ordre 2*

Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$. On définit E, l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et vérifiant la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
Autrement dit : $E = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ / \ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$.

1. Vérifier que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. On considère l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ u & \mapsto & \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$
   Montrer que φ est linéaire et bijective. Que dire de l'espace vectoriel E ?
3. Trouver une base de E lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, puis $(a,b) = (5,-6)$, $(a,b) = (6,-9)$, $(a,b) = (-1,-1)$.

Exercice 24. *Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$*

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathcal{B} = (P_k)_{k=0}^n$ tel que : $P_0 = 1$ et $P_k = X(X-1)\dots(X-k+1) = \displaystyle\prod_{j=0}^{k-1} X - j$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $\varphi \ : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$
   (a) Montrer que φ est une application linéaire.
   (b) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, calculer $\varphi(P_k)$.
   (c) En déduire $\ker(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Exercice 25. *Étude d'un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$*

Soit $\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P + P' \end{array} \right.$
On se propose de démontrer que Ψ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et d'en déduire la résolution d'une équation différentielle.

1. Montrer que Ψ est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}[X]$.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Montrer que Ψ restreint à $\mathbb{R}_n[X]$ est un automorphisme Ψ_n de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) En déduire que Ψ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence d'un unique polynôme P_n tel que $P' + P = X^n$.
   (b) Préciser P_0.
   (c) Préciser le degré de P_n.
   (d) Calculer $\Psi(X^n)$ et donner une relation entre P_{n+1} et P_n.
   (e) Préciser P_1, P_2 et P_3.
   (f) Plus généralement, donner l'expression de P_n.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, résoudre l'équation différentielle $y' + y = x^n$.

Exercice 26. *Endomorphisme solution d'une équation et dimension*

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que : $f^2 + 2f + 2\mathrm{Id} = 0$.
On se propose de démontrer que E est un espace vectoriel de dimension paire.

1. On suppose que $\dim(E) = 3$.
   (a) Soit $u \neq 0$.
   Montrer que $(u, f(u))$ est une famille libre.
   (b) Justifier l'existence d'un vecteur v tel que $(u, f(u), v)$ soit une base de E.
   (c) Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(v) = \alpha u + \beta f(u) + \gamma v$.
   Calculer de deux manières différentes $f^2(v)$ et obtenir une contradiction.
2. La dimension de E est dorénavant supposée quelconque.
   (a) Soit $(u_i)_{i=1}^n$ une famille de vecteurs de E. On suppose que la famille $\mathcal{B} = (u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), \dots, u_n, f(u_n))$ soit libre et qu'elle n'est pas génératrice. Justifier l'existence d'un vecteur v tel que $(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), \dots, u_n, f(u_n), v)$ soit libre.
   (b) Montrer que la famille $(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), \dots, u_n, f(u_n), v, f(v))$ est libre.
   (c) En déduire que la dimension de E est paire.

Exercice 27. *Rang d'une somme d'application linéaire*

Soit E et F, deux espaces vectoriels de dimensions finies, et $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
2. Montrer qu'il y a égalité si, et seulement si $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$ et $\ker(f) + \ker(g) = E$.

Exercice 28. *Image d'un sous-espace vectoriel*

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, avec E et F, deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel, E étant de dimension finie.
Soit A, un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $\varphi(A)$ est un sous-espace vectoriel.
2. Montrer que $\varphi(A)$ est de dimension finie et que $\dim(\varphi(A)) \leq \dim(A)$.
3. Montrer que, si φ est injective, alors $\dim(\varphi(A)) = \dim(A)$.
4. Que peut-on dire si φ est surjective ?

Exercice 29. *Deux applications linéaires*

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies respectives p et q, ainsi que $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,E)$. On pose $\varphi = f \circ g + \mathrm{Id}_F$ et $\psi = g \circ f + \mathrm{Id}_E$.

1. Démontrer que $g(\ker(\varphi) \subset \ker(\psi)$ et que $f(\ker(\psi) \subset \ker(\varphi)$.
2. (a) Qu'elle est la restriction de $f \circ g$ à $\ker(\varphi)$? Qu'elle est la restriction de $g \circ f$ à $\ker(\psi)$?
   (b) En comparant leurs dimensions, en déduire que $g(\ker(\varphi)) = \ker(\psi)$ et que $f(\ker(\psi)) = \ker(\varphi)$.
3. En conclure que $\mathrm{rg}(\varphi) + p = \mathrm{rg}(\psi) + q$.

Exercice 30. *Propriétés équivalentes en dimension finie*

Soit E, un espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\ker(f^2) = \ker(f)$
2. $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$
3. $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$
4. $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$
5. $\ker(f) + \mathrm{Im}(f) = E$

Exercice 31. *Endomorphisme nilpotent*

Soit $m \in \mathbb{N}$. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^m = 0$ et $f^{m-1} \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}^3$ tel que : $f^{m-1}(v) \neq 0$.
2. On suppose $m \geq 4$.
   Montrer que $(f^{m-4}(v), f^{m-3}(v), f^{m-2}(v), f^{m-1}(v))$ est une famille libre.
3. Conclusion ?
4. Dorénavant, on suppose $m = 3$. Que dire du rang de f ?

Exercice 32. *Surjectivité, injectivité, bijectivité...*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et f, g deux endomorphismes de E.
Établir : ($g \circ f$ injective) $\iff$ ($g \circ f$ surjective) $\iff$ (g et f bijectives)

Exercice 33. *Rang de la composée de deux applications linéaires*

Soit E, F, G et H quatre $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. On considère des applications linéaires $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$ et $h \in \mathcal{L}(G,H)$.

1. On suppose ici que f est surjective : que peut-on en déduire concernant les dimensions des espaces E et F ? Montrer ensuite l'égalité des rangs : $\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(g \circ f)$.
2. On suppose ici que h est injective : que peut-on en déduire concernant les dimensions des espaces F et G ? Montrer ensuite l'égalité des rangs : $\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(h \circ g)$.
3. On suppose ici que f et h sont des isomorphismes : que peut-on en déduire concernant les dimensions des espaces E, F et G ?
   Montrer ensuite l'égalité des rangs : $\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(h \circ g) = \mathrm{rg}(g \circ f)$.