Intégration

Exercice 1. Somme de Riemann

A l'aide de sommes de Riemann, déterminer les limites des suites suivantes :

$$1. u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n}$$

$$3. w_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (k^2 + n^2)^{\frac{1}{n}}$$

$$2. v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2 + k^2}$$

$$4. x_n = \left(\frac{(2n)!}{n!n^n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$5. y_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \text{ (on montrera que } \forall x \geq 0 \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x)$$

Exercice 2. Intégrale d'une fonction continue par morceaux

$$\text{Soit } f \begin{cases} [0, \pi] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sin(x) \text{ si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ x & \longmapsto \cos(x) \text{ si } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement f .

2. Calculer $\int_0^\pi f$.

3. Pour tout $x \in [0, \pi]$, calculer $\int_0^x f$.

Exercice 3. Calcul de primitives

Calculer les primitives suivantes :

$$1. \int \tan(x) dx$$

$$6. \int \arcsin(x) dx$$

$$12. \int \sin(2x) \cos(3x) dx$$

$$2. \int \text{th}(x) dx$$

$$7. \int \arctan(x) dx$$

$$13. \int \sin^2(x) \cos^3(x) dx$$

$$3. \int \frac{\ln(x)}{x} dx$$

$$8. \int (x^2 + 1)e^{-x} dx$$

$$14. \int \frac{1}{1 + 4x^2} dx$$

$$4. \int \frac{1}{x \ln(x)} dx$$

$$9. \int \sin(x)e^x dx$$

$$15. \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$5. \int \ln(x) dx$$

$$10. \int \cos(x)e^{2x} dx$$

$$16. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx$$

$$11. \int \cos^4(x) dx$$

Exercice 4. Calcul d'intégrale

Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_0^x \max(2, \text{ch}(t)) dt$$

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2(t)} dt$$

$$2. \int_0^\pi \sin\left(\left(1 + E\left(\frac{x}{4\pi}\right)\right)x\right) dx$$

$$4. \int_1^2 \frac{1}{t + t \ln^2(t)} dt$$

Exercice 5. Changement de variable

Calculer les primitives suivantes en faisant les changements de variable indiqués :

$$1. \int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx \text{ (poser } y = \pi - x).$$

(poser $y = \cos(x)$).

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + 3 \sin^2(x)} dx \text{ (poser } y = \tan(x)).$$

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + 2 \sin(x)} dx \text{ (poser } t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)).$$

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)(1 + \sin^2(x))}{\cos^3(x)} dx$$

$$5. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1 + \tan^2(x))}{\cos^2(x)} dx \text{ (poser } u = \tan(x)).$$

Exercice 6. Primitives de fractions polynomiales

1. Déterminer une primitive de $\left(x \mapsto \frac{x^2}{x^2 + 3}\right)$.

2. Déterminer une primitive de $\left(x \mapsto \frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 5}\right)$

3. Déterminer une primitive de $\left(x \mapsto \frac{2x + 3}{(x-1)^3}\right)$

4. (a) Déterminer $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad \frac{x^3}{(x+1)^2} = ax + b + \frac{cx + d}{(x+1)^2}.$$

(b) En déduire une primitive de $\left(x \mapsto \frac{x^3}{(x+1)^2}\right)$.

5. (a) Déterminer $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$.

(b) En déduire une primitive de $(x \mapsto \frac{1}{x^4 - 1})$.

6. (a) Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{bx + c}{x^2 + x + 1}$.

(b) En déduire une primitive de $(x \mapsto \frac{1}{x^3 - 1})$.

7. (a) Déterminer $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $\frac{x}{x(x+1)^3} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} + \frac{d}{(x+1)^3}$

(b) En déduire une primitive de $(x \mapsto \frac{x}{x(x+1)^3})$.

Exercice 7.

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Montrer que, si $\int_0^1 f = \int_0^1 f^2$, alors f est constante égale à 0 ou 1 sur $[0, 1]$.

Exercice 8.

Soit f et g deux fonctions continues telles que $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ et $f(x) = \int_0^x g(t)dt$. Montrer que $f = g = 0$.

Exercice 9. Inégalités

Soit f et g deux fonctions positives et continues sur $[0, 1]$ telles que $fg \geq 1$.

Montrer que $\left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1 g\right) \geq 1$.

Exercice 10. Inégalités et dérivées

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.

Montrer que $\left(\int_a^b (f'(t))^2 dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b f''^2\right)$.

Exercice 11.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$. On pose : $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$.

1. Montrer que F se prolonge par continuité en 0 et préciser $F(0)$.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et préciser F' .
3. On suppose f dérivable en 0. Montrer qu'alors F est aussi dérivable en 0 et préciser $F'(0)$.

4. On suppose que f admet une limite $L \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Montrer qu'alors F admet également L pour limite en $+\infty$.

Exercice 12.

On étudie de la fonction f définie par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f . Vérifier que f est impaire.
2. Montrer que f est dérivable et exprimer sa dérivée.
3. Donner le tableau de variations de f .
4. En utilisant la décroissance de $(t \mapsto \frac{1}{\ln(1+t^2)})$ sur $]0 + \infty[$, montrer que : $\forall x > 0, \frac{x}{\ln(1+4x^2)} \leq f(x) \leq \frac{x}{\ln(1+x^2)}$.
5. En déduire les limites de f en 0^+ et en $+\infty$. Étudier la nature de la branche infinie de f en $+\infty$ Donner alors l'allure de la courbe représentative de f .

Exercice 13.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \int_0^x \sqrt{1+x^4} dt$.

1. Montrer que f est dérivable et déterminer f' .
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \frac{x^3}{3} \leq f(x) \leq \frac{x^3}{3} + x$.
3. En déduire un équivalent simple de f en $+\infty$.

Exercice 14. Une jolie limite

1. Montrer que $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1+x^2} dx$.

2. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Exercice 15. Suite d'intégrales

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = 0.$$

Exercice 16. *L'intégrale de Dirichlet*

On pose : $I_n = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt$.

1. Justifier l'existence des intégrales I_n et J_n .
2. Montrer que $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt$.
3. Calculer $\sum_{k=1}^n \cos(2kx)$.
4. En déduire la valeur de J_n .
5. On admet que la fonction $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$ est $\mathcal{C}^1$. En appliquant l'exercice 15, en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n - J_n = 0$.
6. En déduire la valeur de I .

Exercice 17. *Suite d'intégrales*

On définit la suite de terme général : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x) dx$.

1. Déterminer I_0 et I_1 .
2. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et en déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $I_{n+2} + I_n$ en fonction de n . En déduire la limite de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer, à l'aide de sommes, I_{2n} en fonction de I_0 et I_{2n+1} en fonction de I_1 .
5. En déduire $\ln(2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ et $\frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$.

Exercice 18.

Soit n un entier naturel, on pose : $I_n = \int_0^1 (1-x^3)^n dx$. (on ne cherchera pas à calculer cette intégrale).

1. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha \in]0, 1[\int_0^\alpha (1-x^3)^n dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
2. Soit $\alpha \in]0, 1[$ Déterminer la limite de $\int_\alpha^1 (1-x^3)^n dx$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 19. *Formule de Taylor*

A l'aide de la formule de Taylor, établir les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R} \operatorname{ch}(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \operatorname{sh}(x) \geq x + \frac{x^3}{6}$
3. $\forall x \in [0, \pi] x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$
4. $\forall x \in \mathbb{R}^+ e^x \geq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 20. *La fonction $\ln(1+x)$*

1. Montrer que : $\forall x \geq 0 \left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
2. En déduire que : $\forall x \in [0, 1] \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = \ln(1+x)$.