Nombres Complexes

Exercice 1. *Forme algébrique*

Mettre sous forme algébrique les nombres suivants :

1. $(3-2\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})$
2. $\dfrac{2+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}$
3. $\dfrac{\sqrt{2}+\mathrm{i}}{2\sqrt{2}+\mathrm{i}}$
4. $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{\sqrt{3}+2\mathrm{i}}$
5. $(2-\mathrm{i})^3$
6. $(1+2\mathrm{i})^4$
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{7}(2\mathrm{i})^k$

Exercice 2. *Puissance de* i

Calculer les puissances de i suivantes :

1. i^{52}
2. i^{2097}
3. i^{2001}
4. i^{314}

Exercice 3. *Équations*

En écrivant z sous forme algébrique, résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $2z+(2+\mathrm{i})\bar{z}=2-\mathrm{i}$
2. $(3+2\mathrm{i})z+(3-\mathrm{i})\bar{z}=3+4\mathrm{i}$
3. $(1+\mathrm{i})z+(1-\mathrm{i})\bar{z}=3$
4. $(2+3\mathrm{i})z+(2-3\mathrm{i})\bar{z}=3$
5. $(1+2\mathrm{i})z+(2\mathrm{i}-1)\bar{z}=2\mathrm{i}$
6. $(1+\mathrm{i})z\bar{z}+2\bar{z}=0$
7. $(1+\mathrm{i})z\bar{z}+(4\mathrm{i}-2)z-4+4\mathrm{i}=0$

Exercice 4. *Nombres réels et imaginaires purs*

Soit $z\in\mathbb{R}$. Préciser si les nombres suivant sont réels ou imaginaires purs :

1. $(1+\mathrm{i})z+(1-\mathrm{i})\bar{z}$
2. $-z+2\mathrm{i}z+\bar{z}+2\mathrm{i}\bar{z}$
3. $3z^2+\mathrm{i}z^2-\mathrm{i}\bar{z}^2+3\bar{z}^2$
4. $5\mathrm{i}z^2+5z^2+10\bar{z}z-5\mathrm{i}\bar{z}^2+5\bar{z}^2$
5. $z^3+z^2\bar{z}+z+\bar{z}+z\bar{z}^2+\bar{z}^3$
6. $2z^3\bar{z}^3+z^4\bar{z}^2+z^3\bar{z}+z^2\bar{z}^4+2z^2\bar{z}^2+z\bar{z}^3+z\bar{z}$
7. $z^3+z^2\mathrm{i}\bar{z}+z+\mathrm{i}z-\bar{z}^3+\mathrm{i}z\bar{z}^2-\bar{z}+\mathrm{i}\bar{z}$

Exercice 5. *Étude d'un ensemble de points*

Soit z un nombre complexe non nul.

1. Montrer que $\dfrac{2z-1}{z^2}$ est réel si et seulement si $z=\bar{z}$ ou $z+\bar{z}=2z\bar{z}$.
2. Décrire géométriquement l'ensemble des points du plan d'affixe z vérifiant : $\dfrac{2z-1}{z^2}$ est réel.

Exercice 6. *Une relation*

Soit $(u,v)\in\mathbb{C}^2$.

1. Montrer que : $|u+v|^2+|u-v|^2=2\left(|u|^2+|v|^2\right)$
2. Donner une interprétation géométrique à l'aide d'un parallélogramme.

Exercice 7. *Une relation*

Soient a et b deux nombres complexes. Montrer que : $\left|\dfrac{a}{|a|^2}-\dfrac{b}{|b|^2}\right|=\dfrac{|a-b|}{|a||b|}$.

Exercice 8. *Nombres réels, imaginaires purs et nombres complexes de module* 1.

1. Soit a un nombre complexe de module 1 tel que $z\neq 1$. Montrer que : $\dfrac{1+a}{1-a}\in\mathrm{i}\mathbb{R}$.
2. Soit $z\in\mathbb{R}$. Montrer que $\dfrac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}$ est un nombre complexe de module 1.
3. Soient a et b deux nombres complexes de module 1 tel que $ab\neq -1$. Montrer que : $\dfrac{a+b}{1+ab}\in\mathbb{R}$
4. Soit a et b deux nombres complexes tel que $a\bar{b}\neq 1$. On pose : $z=\dfrac{a-b}{1-a\bar{b}}$. Montrer que : $|z|=1 \iff |a|=1$ ou $|b|=1$.

Exercice 9. *Quelques équivalences.*

Soit $z\in\mathbb{C}$. Établir les équivalences suivantes :

1. $\left(z+\dfrac{1}{z}\in\mathbb{R}\right) \iff (z\in\mathbb{R}^*$ ou $|z|=1)$
2. $(|z|=1$ et $z\neq 1) \iff \left(\exists x\in\mathbb{R}\ z=\dfrac{x+\mathrm{i}}{x-1}\right)$
3. $z\in\mathbb{R} \iff z^2-|z|^2=0$

Exercice 10. *Trois nombres complexes de modules* 1

Soient a, b et c trois nombres complexes de module 1.
Montrer que $|ab+ac+bc|=|a+b+c|$.

Exercice 11. *n nombres complexes*

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $z_1, \dots, z_n$ n nombres complexes de module 1.
Montrer que : $z = \left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k}\right)$ est un nombre réel tel que : $0 \leq z \leq n^2$.

Exercice 12. *Normalisation.*

Soit $t \in \mathbb{R}$. Transformer les expressions suivantes sous la forme $A\cos(\omega t + \varphi)$ avec $A \in \mathbb{R}^+$, $\omega \in \mathbb{R}^+$:

1. $\cos(t) + \sqrt{3}\sin(t)$
2. $3\cos(2t) - 3\sin(2t)$

Exercice 13. *Polynômes trigonométriques*

Écrire les expressions suivantes sous la forme d'un polynôme trigonométrique.

1. $\sin(2a)\cos(2a)$
2. $\sin(3a)\cos(2a)$
3. $\cos(5a)$
4. $\sin(4a)$

Exercice 14. *Équations*

Résoudre les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivantes :

1. $\sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x) = 0$
2. $\cos(2x) + \cos(4x) + \cos(6x) = 0$
3. $\sin(3x) + 4\sin^2(x) - \sin(x) - 2 = 0$
4. $2\cos^3(x) - 3\cos(2x) + \cos(3x) = 0$

Exercice 15. *Linéarisation.*

Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser les expressions suivantes :

1. $\sin^2(x)\cos^3(x)$
2. $\sin^3(x)$
3. $\sin^5(x)$ $+$ $\cos^4(x)\sin(x)$
4. $\sin^{2n}(x)$ où $n \in \mathbb{N}$
5. $\sin^{2n+1}(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16. *Déterminer les sommes suivantes :*

1. $\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$
2. $\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$
3. $\sum_{k=1}^{n} k\cos(kx)$
4. $\sum_{k=1}^{n} \cos^k(x)\cos(kx)$
5. $\sum_{k=1}^{n} \cos^k(x)\sin(kx)$
6. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\cos(kx)$
7. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\sin(kx)$

Exercice 17. *Soit n un entier naturel non nul. Résoudre les équations suivantes :*

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\cos(a + kx) = 0$
2. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} = 0$

Exercice 18. *Forme trigonométrique.*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Mettre les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

1. 1
2. i
3. -1
4. $2\mathrm{i}$
5. $-2\mathrm{i}$
6. $-3 + 3\mathrm{i}$
7. $(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})^{11}$
8. $\left(\frac{3\sqrt{3} - \mathrm{i}}{\sqrt{3} + 2\mathrm{i}}\right)^{32}$
9. $(1 + \mathrm{i})^{25}$
10. $\frac{\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}$
11. $\left(\frac{\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}\right)^4$
12. $\left(\frac{\sqrt{3} - \mathrm{i}}{\mathrm{i} - 1}\right)^n$
13. $1 + e^{\mathrm{i}\theta}$
14. $(1 + e^{\mathrm{i}\theta})^n$
15. $\left(\frac{1 + \sqrt{2} + \mathrm{i}}{2 + \sqrt{3} - \mathrm{i}}\right)^n$
16. $\frac{(1 + \mathrm{i}\tan(\alpha))^2}{1 + \tan^2(\alpha)}$
17. $\frac{1 - \sin(\theta) + \mathrm{i}\cos(\theta)}{1 - \sin(\theta) - \mathrm{i}\cos(\theta)}$
18. $e^{\mathrm{i}\theta} - e^{\mathrm{i}\theta'}$
19. $(1 + \mathrm{i})^n - (1 - \mathrm{i})^n$
20. $\sqrt{2 + \sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

Pour la question 17, on précisera pour quelles valeurs de θ cette expression est bien définie.

Exercice 19. *Calcul de $\cos(\frac{\pi}{12})$, $\sin(\frac{\pi}{12})$ et $\tan(\frac{\pi}{12})$.*

1. Calculer $\cos(\frac{\pi}{12})$, $\sin(\frac{\pi}{12})$ et $\tan(\frac{\pi}{12})$.
2. Soient $z = 1 + \mathrm{i}$ et $z' = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.
   (a) Mettre z, z' et $\frac{z}{z'}$ sous forme trigonométrique.
   (b) Retrouver $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 20. *Une équation*

Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivantes :

1. $\mathrm{e}^z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$
2. $\mathrm{e}^{2z} = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$
3. $\mathrm{e}^{2z} + \mathrm{e}^z + 1 = 0$
4. $\mathrm{e}^{3z} - 2\mathrm{e}^{2z} + 2\mathrm{e}^z = 0$

Exercice 21. *Racines carrées.*

Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1. $-3 + 4\mathrm{i}$
2. $1 + 4\sqrt{3}\mathrm{i}$
3. $-7 - 24\mathrm{i}$
4. $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$
5. $72\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$
6. $-2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$

Exercice 22. *Équations.*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $\mathrm{i}z^2 + (2-3\mathrm{i})z - 1 + 5\mathrm{i} = 0$
2. $z^2 + (1+8\mathrm{i})z - 17 + \mathrm{i} = 0$
3. $\mathrm{i}z^2 + (4\mathrm{i}-3)z + \mathrm{i} - 5 = 0$
4. $z^4 - (7+7\mathrm{i})z^2 + 25\mathrm{i} = 0$
5. $\left(\dfrac{z-2\mathrm{i}}{z-1}\right)^2 - (3+2\mathrm{i})\left(\dfrac{z-2\mathrm{i}}{z-1}\right) + 3\mathrm{i} - 1 = 0$
6. $\left(\dfrac{\mathrm{i}z+1}{z-2}\right)^2 - (1+2\mathrm{i})\left(\dfrac{\mathrm{i}z+1}{z-2}\right) + \mathrm{i} - 1 = 0$

Exercice 23. *Équation avec solution particulière.*

Résoudre les équations suivantes :

1. $z^3 + (-3+2\mathrm{i})z^2 + (-1-5\mathrm{i})z + 6 + 2\mathrm{i} = 0$ sachant qu'elle admet une solution réelle.
2. $z^3 + (1+\mathrm{i})z^2 + (4-\mathrm{i})z + (12-6\mathrm{i}) = 0$ sachant qu'il y a une racine réelle.
3. $\mathrm{i}z^3 - (4+9\mathrm{i})z^2 + (18+31\mathrm{i})z - (18+39\mathrm{i}) = 0$ sachant qu'il y a une racine réelle.
4. $z^4 + 2(1+\mathrm{i})z^3 + 3\mathrm{i}z^2 + (-1+\mathrm{i})z - 2(1+3\mathrm{i})$ sachant qu'elle admet une solution réelle et une solution imaginaire pure.
5. $2z^4 - 6z^3 + 9z^2 - 6z + 2 = 0$ en remarquant que $1+\mathrm{i}$ est une solution évidente...

Exercice 24. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre :*

1. $(z+1)^n = (z-1)^n$
2. $z^n = (1+z)^n$
3. $27(z-1)^6 - (z+1)^6 = 0$

Exercice 25. *Soit un réel α tel que $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Résoudre :*

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\right)^4 = \frac{1+\mathrm{i}\tan(\alpha)}{1-\mathrm{i}\tan(\alpha)}$$

Exercice 26. *Résoudre l'équation suivante :*

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 1$$

Exercice 27. *Équation de degré* 3.
Soient P le polynôme défini par : $P(X) = X^3 + 3X - 10$.

1. Démontrer l'affirmation suivante : le nombre $z \in \mathbb{C}$ est une racine de P si et seulement il existe u et v deux nombres complexes tels que : $P(u+v) = 0$, $uv = -1$ et $z = u + v$.
2. Soient u et v deux nombres complexes tels que : $P(u+v) = 0$ et $uv = -1$.
   (a) Déterminer $u^3 + v^3$.
   (b) En déduire les valeurs possibles de u^3 et v^3.
   (c) En déduire les six valeurs possibles pour le couple (u, v).
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$, $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 28. *Un triangle.*

Soient A, B et C trois points du plan d'affixe respectives $-3-6\mathrm{i}$, -5 et $3-4\mathrm{i}$. Déterminer la nature du triangle ABC. Indication : votre démonstration ne contiendra qu'un seul calcul.

Exercice 29. *Orthocentre et centre de gravité.*

Soient A, B et C trois points distincts du cercle unité d'affixes respectives a, b et c.

1. Déterminer l'affixe g du centre de gravité G du triangle ABC.
2. Déterminer l'affixe h de l'orthocentre H du triangle ABC en fonction de a, b et c.
3. Montrer que G et H sont confondues si, et seulement si, $a + b + c = 0$.
4. On suppose que G et H sont confondues.
   (a) Déterminer $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.
   (b) En déduire les valeurs de $\dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a}$ et de $\dfrac{bc}{a^2}$.
   (c) Exprimer b et c en fonction de a. (Il y a deux cas.)
   (d) En déduire que ABC est équilatérale.

Exercice 30. *Parallélogramme de Varignon.*

Soit $ABCD$ un quadrilatère du plan. Soient A', B', C' et D' les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Montrer que le quadrilatère $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

Exercice 31. *Trouver l'ensemble des nombres complexes z tels que*

1. les points d'affixe 1, z et $1 + z^2$ soient alignés.
2. le triangle ayant pour sommet les points d'affixes z, z^2 et z^3 soit rectangle en z.

Exercice 32. *Triangle équilatéral.*

Dans le plan complexe, on donne trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c. Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si : $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = 0$.

Exercice 33. *Soient a et b deux nombres complexes distincts et θ un réel. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tel que :* $\arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right) = \theta[\pi]$.

Exercice 34. *Étude d'une homographie.*

Soit l'application F du plan qui, à un point M d'affixe z de $\mathbb{C} \setminus \{-1-3\mathrm{i}\}$, associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{z + \frac{7}{2} - 3\mathrm{i}}{z + 1 + 3\mathrm{i}}$$

1. Trouver les points fixes de l'application F.
2. Trouver l'ensemble des points M tels que :
   (a) $|z'| = 1$
   (b) $z' \in \mathbb{R}$

Exercice 35. *Inversion de droites affines et de cercles.*

Soit I l'application de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ par $I(z) = \dfrac{1}{z}$. Soit D une droite de affine de $\mathbb{C}$. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre A d'affixe a et de rayon r.

1. On suppose $0 \notin D$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique nombre complexe b tel que la droite D soit caractérisée par l'équation $|z| = |z - b|$.
   (b) En déduire la nature de $I(D)$.
2. On suppose $0 \in D$. Caractériser $I(D)$.
3. On suppose $0 \notin \mathcal{C}$. Montrer que $I(\mathcal{C})$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
4. On suppose $0 \in \mathcal{C}$. Montrer que $I(\mathcal{C})$ est une droite dont on donnera une équation en fonction de a et de r.

Exercice 36. *Similitudes*

Donner les caractéristiques des similitudes d'expressions analytiques suivantes :

1. $z' = (1 - \mathrm{i})z + 2\mathrm{i}$
2. $z' = (\sqrt{3} + \mathrm{i})z + 3 + 3\mathrm{i}(1 - \sqrt{3})$
3. $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} z + \mathrm{i}$
4. $z' = \dfrac{1 + i}{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}} z + 1 - \sqrt{3} + \mathrm{i}(3 - \sqrt{3})$

Exercice 37. *Donner la représentation complexe de la similitude de rapport* 2, *d'angle* $\dfrac{\pi}{3}$ *et de centre* Ω *d'affixe* $1 + 2\mathrm{i}$.

Exercice 38. *Composition de rotations.*

Soient $\theta_1 \in \mathbb{R}$, $\theta_2 \in \mathbb{R}$, Ω_1 un point du plan d'affixe ω_1 et Ω_2 un point du plan d'affixe ω_2. Soient r_1 la rotation de centre Ω_1 et d'angle θ_1 et r_2 la rotation d'angle θ_2. On pose $r = r_1 \circ r_2$.

1. Déterminer, sans calcul, la nature de la similitude r. (On fera attention à distinguer les cas particuliers).
2. Déterminer toutes les caractéristiques de la similitude r.

Exercice 39. *Étude d'une similitude*

On désigne par T l'application du plan dont la représentation complexe est la suivante $z' = (1 + \mathrm{i})z - \mathrm{i}$, $z \in \mathbb{C}$. Soient M et M' deux points du plan tel que $M' = T(M)$.

1. (a) Montrer que T est une similitude directe du plan dont on donnera les éléments caractéristiques.
   On notera A le point invariant de T.
   (b) Déterminer la nature du triangle AMM'.
2. Déterminer l'image D' de la droite D d'équation $y = x$ par la similitude T.
3. (a) Montrer qu'il existe un point B du plan distinct de A et un seul tel que les affixes z_0 de B et z_0' de $B' = T(B)$ soient liées par la relation $z_0 z_0' = 1$.
   (b) Soit A' le symétrique de A par rapport à O l'origine du plan. Montrer que les points A, A', B et B' sont cocycliques, *i.e.* sont quatres points d'un cercle que l'on caractérisera.

Indication : faire une figure.

Exercice 40. *Étude de deux similitudes du plan (adapté de "BAC S 1999 - centres étrangers")*

Soient A et B les points d'affixes respectives 1 et i. On note O l'origine du repère. Soit M un point d'affixe z distinct de A et B. Soient M_1 et M_2 les deux points du plan tels que les triangles BMM_1 et AMM_2 soient isocèles rectangles avec : $(\overrightarrow{M_1B}, \overrightarrow{M_1M}) = (\overrightarrow{M_2M}, \overrightarrow{M_2A}) = \dfrac{\pi}{2}$

1. Faire une figure soignée.
2. (a) Déterminer les affixes z_1 et z_2 des points M_1 et M_2.
   (b) En déduire que M_1 et M_2 sont les images de M par deux similitudes T_1 et T_2 indépendantes du point M dont on précisera les caractéristiques.
3. On se propose de déterminer les points M tels que le triangle OM_1M_2 soit équilatéral.
   (a) Montrer que $OM_1 = OM_2$ si, seulement si, M est sur une droite (Δ) dont on donnera une équation.
   (b) Montrer que $OM_1 = M_1M_2$ si, seulement si, M est sur un cercle (Γ) dont on précisera le centre et le rayon.
   (c) En déduire les affixes des points M tels que le triangle OM_1M_2 soit équilatéral.