Matrices

Corrigé : Exercice 12 - Exercice 13 - Exercice 15

1 Exercice 12

1. On a : $\varphi(1) = (X^2+1).1' - 3X.1 = -3X$
   $\varphi(X) = (X^2+1).X' - 3X.X = -2X^2+1$
   $\varphi(X^2) = (X^2+1).(X^2)' - 3X.X^2 = -X^3+2X$
   et : $\varphi(X^3) = (X^2+1).(X^3)' - 3X.X^3 = 3X^2$.
   On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
   On en déduit que : $\boxed{A = M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$

2. On fait les opérations sur les lignes suivantes :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\downarrow {\scriptstyle L_1 \leftrightarrow L_2 \atop L_3 \leftrightarrow L_4}$$
$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\downarrow L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2$$
$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\downarrow L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3$$
$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\downarrow {\scriptstyle L_1 \leftarrow -\frac{L_1}{3} \atop {L_2 \leftarrow -L_2 \atop L_4 \leftarrow \frac{L_4}{3}}}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

   $\boxed{\text{On en déduit que } A \text{ est inversible et que } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}}$

3. A est la matrice de φ et A est inversible.
   Donc, φ est bijective.
   Or, φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
   $\boxed{\varphi \text{ est donc un automorphisme de } \mathbb{R}_3[X].}$

4. On résout : $(x^2+1)y' - 3xy = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (E)$.
   L'équation homogène associée à (E) est : $(x^2+1)y' - 3xy = 0 \quad (E_0)$.
   On a : $(E_0) \iff y' - \dfrac{3x}{x^2+1}y = 0$.
   Une primitive de $a(x) = -\dfrac{3x}{x^2+1} = -\dfrac{3}{2}\dfrac{2x}{x^2+1}$ est $A(x) = -\dfrac{3}{2}\ln(x^2+1)$.
   La solution générale de (E_0) est donc :
$$x \mapsto \lambda.\exp\left(\frac{3}{2}\ln(x^2+1)\right) = \lambda.(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$$
   où $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On cherche une solution particulière de (E) sous la forme d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$.
   On a : P est solution de (E) si, et seulement si, $\varphi(P) = aX^3 + bX^2 + cX + d \quad (E')$.
   Or : $\big(aX^3 + bX^2 + cX + d\big)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}$.

$$\text{Ainsi, } (E') \iff A.(P)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}.$$

$$\iff (P)_{\mathcal{B}} = A^{-1}.\begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}$$

$$\iff (P)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{c+2a}{3} \\ d \\ -a \\ \frac{2d+b}{3} \end{pmatrix}$$

Ainsi, $-\frac{c+2a}{3} + dX - aX^2 + \frac{2d+b}{3}X^3$ est une solution particulière de (E).

La solution générale de (E) est donc :

$$x \mapsto -\frac{c+2a}{3} + dx - ax^2 + \frac{2d+b}{3}x^3 + \lambda.(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

2 Exercice 13

1. On a : $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix}$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} a-b & b-c \\ c-b & a-c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\big((a-b)(a-c) + (b-c)^2\big)$$

D'où : $\boxed{\det(A) = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)}$

2. Par le calcul précédent, nous observons que $\det(A)$ se factorise par $a+b+c$.

3. On suppose $c = b$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) &\iff \det(A) = 0 \\ &\iff (a+2b)(a^2+b^2-2ab) = 0 \\ &\iff a = -2b \text{ ou } (a-b)^2 = 0 \\ &\iff a = -2b \text{ ou } a = b \end{aligned}$$

Si $c = b$, alors la matrice A est inversible si, et seulement si, $a \neq -2b$ et $a \neq b$.

4. On a : $\det(A) = (a+b+c)\dfrac{(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2ac+c^2)+(b^2-2ab+c^2)}{2}$

$$= (a+b+c)\frac{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \det(A) = 0 &\iff a+b+c = 0 \text{ ou } (a-b=0 \text{ et } a-c=0 \text{ et } b-c=0) \\ &\iff a+b+c=0 \text{ ou } a=b=c \end{aligned}$$

La matrice A est inversible si, et seulement si, $a+b+c \neq 0$ et $\big((a \neq b) \text{ ou } (a \neq c) \text{ ou } (b \neq c)\big)$.

3 Exercice 15

1. Puisque A est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\boxed{\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+4y-4z \\ -x+2y+z \\ x-2y+5z \end{pmatrix}}$$

2. On résout $A.X = 0 \quad (E)$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\text{On a : } (E) \iff \begin{cases} -2x+4y-4z = 0 \\ -x+2y+z = 0 \\ x-2y+5z = 0 \end{cases} \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{L_1}{2}+L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2+L_3}}{\iff} \begin{cases} 3z = 0 \\ 4z = 0 \\ x-2y+5z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\ker(A) = \mathrm{vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc $\boxed{\text{une base de } \ker(A) \text{ est } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$.

Par le théorème du rang, on a : $\dim(\mathrm{Im}(A)) = 3 - \dim(\ker(A)) = 3 - 1 = 2$.
La première et la troisième colonne de A ne sont pas colinéaires. Elles forment une famille libre de deux vecteurs de $\mathrm{Im}(A)$.

$$\boxed{\text{Une base de } \mathrm{Im}(A) \text{ est donc : } \left(\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\1\\5\end{pmatrix}\right).}$$

3. (a) $\ker(A - \lambda.I_3) \neq \{0\}$ est non réduit à $\{0_{\mathbb{R}}^3\}$ si, et seulement si, $A - \lambda.I_3 \notin \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $\det(A - \lambda.I_3) = 0$.

Or : $$\det(A - \lambda.I_3) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 & -4 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$
$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1-(2+\lambda)L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3+L_1}}{=} \begin{vmatrix} 0 & \lambda^2 & -6-\lambda \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda & 6-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -6-\lambda \\ -1 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= \lambda\big(\lambda(6-\lambda) - 6 - \lambda = \lambda(-\lambda^2 + 5\lambda - 6)$$
$$= -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$$

Donc : $\det(A - \lambda.I_3) = 0 \iff \lambda \in \{0, 2, 3\}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \ker(A - \lambda.I_3) \neq \{0\} \text{ est non réduit à } \{0_{\mathbb{R}}^3\} \text{ si, et seulement si, } \lambda \in \{0,2,3\}.}$$

(b) Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

On a : $$X \in \ker(A - 2I_3) \iff \begin{cases} -4x + 4y - 4z = 0 \\ -x + z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4y - 8x = 0 \\ z = x \\ -2y + 4x = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = 2x \\ z = x \end{cases}$$
$$\iff \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad X = \begin{pmatrix}\alpha\\2\alpha\\\alpha\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}1\\2\_1\end{pmatrix}$$

D'où $\ker(A - 2I_3) = \mathrm{vect}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

$$\boxed{u_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \text{ convient.}}$$

On a : $$X \in \ker(A - 2I_3) \iff \begin{cases} -5x + 4y - 4z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$
$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1+5L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2+L_3}}{\iff} \begin{cases} -6y + 6z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$
$$\iff \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad X = \begin{pmatrix}0\\\alpha\\\alpha\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

D'où : $\ker(A - 3I_3) = \mathrm{vect}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\boxed{u_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \text{ convient.}}$$

4. On a : $$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{C} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

5. On a : $$\begin{cases} f(u_0) = A.u_0 = 0 f(u_2) - 2u_2 = (A - 2I_3).u_2 = 0 \\ f(u_3) - 2u_3 = (A - 2I_3).u_3 = 0 \end{cases}$$

Donc : $$\begin{cases} f(u_0) = 0 \\ f(u_2) = 2u_2 \\ f(u_3) = 3u_3 \end{cases}$$

D'où : $(f(u_0))_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $(f(u_2))_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ et $(f(u_3))_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$.

On en déduit que : $$\boxed{B = M_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

6. La matrice B est diagonale.

   On en déduit : $\boxed{B^0 = I_3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}}$

   On a : $B^n = M_{\mathcal{C}}(f^n)$ et $A^n = M_{\mathcal{B}}(f^n)$.
   Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$.
   On a alors : $B^n = P^{-1}.A^n.P$.
   Donc : $A^n = P.B^n.P^{-1}$.
   On a : $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Il nous reste à calculer P^{-1}. Pour cela, nous faisons les opérations sur les lignes suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\downarrow L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\downarrow L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\downarrow L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\downarrow L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

   D'où : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

   Donc, si $n \neq 0$,
$$A^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 3^n \\ 0 & 2^n & 3^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

   On en déduit que :
$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} -2^n & 2^{n+1} & -2^{n+1} \\ -2^{n+1} + 3^n & 2^{n+2} - 2.3^n & -2^{n+2} + 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 2^{n+1} - 2.3^n & -2^{n+1} + 3^{n+1} \end{pmatrix} \text{ si } n \neq 0}$$
   et : $A^0 = I_3$.