Espace euclidien

Exercice 1. *Premiers exemples*

Déterminer si les applications suivantes sont des produits scalaires.

1. $<.|.>= \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) & \longmapsto 3x_1y_1 + 5x_2y_2 \end{cases}$
2. $<.|.>= \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) & \longmapsto 3x_1y_1 - 5x_2y_2 \end{cases}$
3. $<.|.>= \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) & \longmapsto (x_1+ax_2)(y_1+ay_2)+(x_1+bx_2)(y_1+by_2) \end{cases}$
   où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
4. $<.|.>= \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) & \longmapsto 2x_1y_1 + 5x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1 \end{cases}$
   (Indication : se ramener à la forme précédente)
5. $<.|.>= \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_i)_{i=1}^n,(y_i)_{i=1}^n) & \longmapsto \displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i y_i \end{cases}$
   où $(\alpha_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$
6. $<.|.>= \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (X,Y) & \longmapsto {}^tX{}^tAAY \end{cases}$
   où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et où l'on identifie $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 2. *Produits scalaires de* $\mathbb{R}^2$

On note (e_1,e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit φ une application bilinéaire symétrique. On pose : $A=\varphi(e_1,e_1)$, $B=\varphi(e_1,e_2)$ et $C=\varphi(e_2,e_2)$.

1. Soit $u=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ et $v=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$. Exprimer $\varphi(u,v)$ en fonction de A, B et C.
2. Réciproquement, montrer que si φ est une application vérifiant l'expression précédente, alors φ est une application bilinéaire symétrique.
3. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si, $B^2-AC<0$ et $A>0$.

Exercice 3. *Produits scalaires sur* $\mathcal{C}^1([a,b])$

Soit $E=\mathcal{C}^1([a,b])$. On définit l'application $(.|.)$ par $(f|g)=\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt+\int_a^b f'(t)g'(t)dt$ où f et g deux éléments de E.
Montrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur E.

Exercice 4. *Produit scalaire sur* $\mathbb{R}_n[X]$

On définit $(.|.)$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $(P|Q)=\displaystyle\sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$.

1. Montrer que $(.|.)$ est un produit scalaire.
2. Pour tout $i\in[\![0,n]\!]$, on définit : $P_i=\displaystyle\prod_{j=0,j\neq i}^n \frac{X-j}{i-j}$.
   Montrer que $(P_i)_{i=0}^n$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 5. *Produit scalaire sur* $\mathbb{R}_n[X]$

On définit $(.|.)$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $(P|Q)=\displaystyle\sum_{k=0}^n P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$.

1. Montrer que $(.|.)$ est un produit scalaire de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que $\left(\dfrac{X^k}{k!}\right)_{k=0}^n$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 6. *Orthogonalité*

Soit u et v deux vecteurs d'un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $(.|.)$.

1. Montrer que : $\|u\|=\|v\| \iff u+v\perp u-v$ et $u\perp v \iff \|u+v\|=\|u-v\|$.
2. Quelle interprétation donnée à ces résultats ?

Exercice 7. *Inégalités*

Soit $(a_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$,$(b_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$ et $(c_k)_{k=1}^n \in (\mathbb{R}^{+*})^n$. Établir les inégalités suivantes.

1. $\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)$.
2. $\left(\sum_{k=1}^n c_k a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n c_k a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n c_k b_k^2\right)$.
3. $\sum_{k=1}^n |a_k| \leq \sqrt{n}\sqrt{\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)}$.
4. On suppose $\sum_{k=1}^n c_k = 1$. Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k} \geq n^2$

Exercice 8. *Inégalités*

Montrer les inégalités suivantes et étudier le cas d'égalité.

1. $\forall (x_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n \quad \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n\sum_{k=1}^n x_k^2$
2. $\forall f \in \mathcal{C}^0([a,b]) \quad \left(\int_a^b f\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f^2$

Exercice 9. *Inégalités*

Soit $(u_k)_{k=1}^n$ une famille de vecteur d'un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $(.|.)$.

1. Montrer que : $\left\|\sum_{k=1}^n u_k\right\|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n \|u_k\|\right)^2$.
2. En déduire que : $\left\|\sum_{k=1}^n u_k\right\|^2 \leq n\sum_{k=1}^n \|u_k\|^2$.

Exercice 10. *Orthogonal d'un sous-ensemble*

Soit E un espace vectoriel euclidien.
Pour $A \subset E$, un sous-ensemble de E, on note $A^\perp = \{u \in E \ / \ \forall v \in A \quad u \perp v\}$.

1. Montrer que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $A^\perp = (\text{vect}(A))^\perp$.
3. En déduire que : $(A^\perp)^\perp = \text{vect}(A)$.

Exercice 11. *Orthogonal d'une somme ou d'une intersection*

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E, un espace vectoriel euclidien.
Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 12. *Orthonormalisation*

Soit $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,1,0)$ et $u_3 = (2,0,1)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à $\mathcal{B}$.
3. En déduire la projection de u_3 sur $P = \text{vect}(u_1, u_2)$ et la distance entre u_3 et P.
4. Plus généralement, déterminer la projection d'un vecteur $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ sur P.

Exercice 13. *Orthonormalisation*

Soit $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,1,1)$ et $u_3 = (1,0,1)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Aplliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à $\mathcal{B}$.
3. En déduire la projection de u_3 sur P, le plan d'équation $x - y + z = 0$, et la distance entre u_3 et P.
4. Plus généralement, déterminer la projection d'un vecteur $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ sur P.

Exercice 14. *Projection orthogonale*

On considère la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$.

1. Déterminer une base orthonormale de P.
2. En déduire la projection orthogonale p sur P.
3. Déterminer une base de $P^\perp$.
4. En déduire la projection q sur $P^\perp$.
5. Retrouver alors p.

Exercice 15. *Symétrie orthogonale*

Déterminer le symétrique orthogonal d'un vecteur $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ sur les espaces vectoriels suivants et en donner la matrice dans la base canonique.

1. le plan P d'équation $x+2y+2z=0$.
2. le plan P d'équation $x+y+z=0$.
3. la droite d'équation $\left\{\begin{array}{l} 4x+y+z=0 \\ y-z=0 \end{array}\right.$
4. la droite d'équation $\left\{\begin{array}{l} x+2y+3z=0 \\ x+y-z=0 \end{array}\right.$

Exercice 16. *Projection sur un espace de polynôme*

1. Montrer que l'application $(.,.)$ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par : $(P,Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire de $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer le projeté d'un polynôme quelconque de degré inférieur ou égal à 4 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 17. *Distance à un plan*

1. Montrer que $\varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Calculer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 18. *Meilleure approximation d'une fonction*

On désigne par E l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi,\pi]$. On considère l'application $(.|.)$ de $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par : $(f|g) = f(0)g(0) + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)g'(x)\mathrm{d}x$

1. Montrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur E.
2. Déterminer la meilleure approximation de cos par un polynôme de degré au plus 2 pour le produit scalaire $(.|.)$.

Exercice 19. *Meilleure approximation d'un polynôme*

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On définit $<.|.>$ sur E^2 par : $\forall (P,Q) \in E^2 \quad \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t$.

1. Montrer que $<.|.>$ est un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. En déduire la meilleure approximation de X^3 par un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

Exercice 20.

Soit $(a_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$ et $(e_k)_{k=1}^n$ un base de E un espace vectoriel euclidien muni d'un produit scalaire $<.|.>$.

1. Montrer qu'il existe un unique vecteur $u \in E$ tel que : $\forall k \in [\![1,n]\!] \ \ <u|e_k>= a_k$.
2. On suppose de plus que $(e_k)_{k=1}^n$ est une base orthonormale.
   Déterminer u.