Fonctions usuelles

Exercice 1. *Montrer que les fonctions définies par les expressions suivantes se prolongent par continuité en 0 :*

1. $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$
2. $f(x) = \dfrac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$
3. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x\tan(x)}$
4. $f(x) = \dfrac{\tan\left(\dfrac{\pi x}{1+2x}\right)}{x}$

Exercice 2. *Montrer que les fonctions définies par les expressions suivantes se prolongent par continuité en 0 en une fonction dérivable :*

1. $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{\cos(x)}-1}{x}$

Exercice 3. *Étudier la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+2x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ \sqrt{3x^2+2x+1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+2x+4} & \text{si } x \geq 0 \\ \sqrt{3x^2+2x+1}+1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} \cos(\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \\ \text{ch}(\sqrt{-x}) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Exercice 4. *Montrer que les fonctions f suivantes sont dérivables et préciser leurs dérivées.*

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} \cos(\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \\ \text{ch}(\sqrt{-x}) & \text{si } x < 0 \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Indications : En admettant que $\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0, comparer $f'(0)$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f'(x)$.

Exercice 5. *Montrer que les fonctions suivantes sont bijectives. Déterminer leur bijection réciproque. Étudier la dérivabilité de leur réciproque et proposer deux méthodes de calculs pour la dérivée de leur réciproque.*

1. $f(x) = \ln(1+e^x)$
2. $f(x) = x^2+x+1$ pour $x \geq 0$
3. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$ pour $x \geq 0$.
4. $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$

Exercice 6. *Montrer que les fonctions suivantes admettent une asymptote en $+\infty$ dont vous préciserez l'équation :*

1. $f(x) = \dfrac{x^2-2x+3}{x-2}$
2. $f(x) = \sqrt{x^2+2bx+c}$ où $(b,c) \in \mathbb{R}^2$
3. $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{\sqrt{x^2+x+1}}$
4. $f(x) = \dfrac{x\ln(1+x^2)}{\ln(x)}$

Exercice 7. *Étudier la convexité des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = \dfrac{x^2-2x+3}{x-2}$
2. $f(x) = \sqrt{x^2+2bx+c}$ où $(b,c) \in \mathbb{R}^2$
3. $f(x) = \ln(1+e^x)$
4. $f(x) = \dfrac{\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x^2}$

Exercice 8. *Faire l'étude complète des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-1}$
2. $f(x) = \sqrt{x^2+2x+3}$
3. $f(x) = \sqrt{x^2-2x-3}$
4. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

Exercice 9. *Étudier les familles de fonctions suivantes :*

1. $f_n(x) = x\ln^n(x)$ où $n \in \mathbb{N}$.
2. $f_m(x) = \ln(e^x+me^{-x})$ où $m \in \mathbb{R}^{+*}$.
3. $f_k(x) = (x+1)e^{kx}$ où $k \in \mathbb{R}$.
4. $n\ln(1+x) + \dfrac{x}{x+1}$ où $n \in \mathbb{N}$

Exercice 10. *Calculer la somme suivante :* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(1+1/k)$

Exercice 11. *Résoudre les équations suivantes :*

1. $5^6 - 3^{-x} = 0$
2. $3^{2x+2} - 2^{x+1/2} = 9^x - 4^{x/2-1/4}$
3. $2\ln(x) = \ln(x-2) + \ln(2x+3)$
4. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$
5. $x^{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{x}^x$ où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
6. $x^x = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

Exercice 12. *Calculer les limites suivantes.*

1. $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}$
2. $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\ln(1+2x)}{x}$
3. $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\ln(1+x+x^2)}{x}$
4. $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{e^x}{\ln(1+x^2)}$
5. $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x}{\ln(1+e^x)}$
6. $\lim_{x\longrightarrow+\infty} x\ln(1+e^{-x})$
7. $\lim_{x\longrightarrow-\infty} x\ln(1+e^{-x})$
8. $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \ln(1+x^2)-\ln(x)$
9. $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\ln(1+2x^2)}{\ln(2+3x)}$
10. $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x^{x^x}}{(x^x)^x}$
11. $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{a^{b^x}}{b^{a^x}}$ où $1<a<b$
12. $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{a^{a^x}}{x^{x^a}}$ où $1<a$
13. $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\ln(x^2)}$
14. $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ où $a,b\in\mathbb{R}$.
15. $\lim_{x\longrightarrow+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})$

Exercice 13. *Limite d'une suite.*

1. Montrer : $\forall x>0 \quad x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$
2. Soit $x>0$. Calculer la limite de $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ quand n tend vers $+\infty$.
3. Calculer la limite de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $P_n=\prod_{k=1}^{n} 1+\frac{k}{n^2}$.

Exercice 14. *Etude d'une fonction.*

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Etudier la convexité de f. Montrer que f possède un unique point d'inflexion que l'on déterminera.
4. Montrer que ce point est un centre de symétrie du graphe de f.
5. Montrer que f est une bijection entre deux ensembles que l'on précisera. Donner une expression de f^{-1}.

Exercice 15. *Etude d'une fonction.*

Soit f la fonction définie par l'expression suivante : $f(x)=\sqrt{\frac{\ln(x)}{x}}$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Etudier la convexité de f. Montrer que f possède un unique point d'inflexion que l'on déterminera.

Exercice 16. *Etudier les fonctions suivantes :*

1. $(x\mapsto \ln(\ln(x)))$
2. $\left(x\mapsto \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)\right)$
3. $\left(x\mapsto e^{\frac{1}{x}}\right)$
4. $\left(x\mapsto \frac{x^{\frac{1}{3}}}{1-x^{\frac{1}{2}}}\right)$

Exercice 17. *Résoudre l'équation $p^q=q^p$ où p et q sont des entiers. (On fera l'étude d'une fonction auxiliaire bien choisie.)*

Exercice 18. *Fonctions hyperboliques.*

Soient $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ et $p\in\mathbb{Z}$. Montrer les égalités suivantes :

1. $\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$
2. $\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$
3. $\operatorname{th}(x+y)=\frac{\operatorname{th}(x)+\operatorname{th}(y)}{1+\operatorname{th}(x)\operatorname{th}(y)}$
4. $(\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x))^p=\operatorname{ch}(px)+\operatorname{sh}(px)$
5. $\operatorname{ch}(x)=\frac{1+\operatorname{th}^2(\frac{x}{2})}{1-\operatorname{th}^2(\frac{x}{2})}$

Exercice 19. *Fonctions hyperboliques réciproques.*

Donner des expressions explicites des fonctions Argsh, Argch et Argth.

Exercice 20. *Résoudre les équations suivantes :*

1. $\operatorname{ch}(x)=2$
2. $\operatorname{sh}(x)=2$
3. $\operatorname{ch}^2(x)+\operatorname{sh}^2(x)=3$
4. $5\operatorname{ch}(x)-3\operatorname{sh}(x)=4$
5. $\operatorname{sh}(x)-4\operatorname{sh}(2x)+\operatorname{sh}(3x)=0$
6. $\operatorname{Argth}(x)=\operatorname{Argch}\left(\frac{1}{x}\right)$
7. $\operatorname{Argch}(x)=\operatorname{Argsh}(2-x)$

Exercice 21. *Soit $x\in\mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :*

1. $\sum_{k=0}^{n}\operatorname{ch}(kx)$
2. $\sum_{k=0}^{n}\operatorname{sh}(kx)$
3. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\operatorname{ch}(kx)$
4. $\sum_{k=0}^{n}k\operatorname{ch}(kx)$
5. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\operatorname{ch}(kx)\operatorname{sh}((n-k)x)$

Exercice 22. *Pour x et y réels, transformer :*

1. $\operatorname{Argsh}(x)+\operatorname{Argsh}(y)$
2. $\operatorname{Argch}(x)+\operatorname{Argch}(y)$
3. $\operatorname{Argth}(x)+\operatorname{Argth}(y)$

Exercice 23. *Après avoir transformé l'expression, étudier les fonctions définies sur l'ensemble des réels par :*

1. $\mathrm{ch}(2\mathrm{Argth}(x))$
2. $\mathrm{th}(3\mathrm{Argth}(x))$
3. $\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\mathrm{Argch}(x)\right)$
4. $\mathrm{Argth}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

Exercice 24. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Préciser l'ensemble de définition et simplifier les expressions suivantes :*

1. $\mathrm{sh}(\mathrm{Argsh}(x))$
2. $\mathrm{sh}(\mathrm{Argch}(x))$
3. $\mathrm{ch}(\mathrm{Argsh}(x))$
4. $\mathrm{ch}(\mathrm{Argch}(x))$
5. $\mathrm{Argth}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$
6. $\mathrm{Argth}\left(\frac{1+3\mathrm{th}(x)}{3+\mathrm{th}(x)}\right)$
7. $\mathrm{Argch}\left(\sqrt{\frac{t+1}{2}}\right)$ (Exprimer $\mathrm{ch}(2u)$ en fonction de $\mathrm{ch}(u)$.)

Exercice 25. *Etudier les fonctions f d'expressions suivantes :*

1. $f(x) = \arcsin(\sin(x))$
2. $f(x) = \arccos(\sin(x))$
3. $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

Exercice 26. *Calculer la valeur des expressions suivantes :*

1. $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$
2. $\arctan(2\sqrt{2}) + 2\arctan(\sqrt{2})$
3. $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{7}{25}\right)\right)$

Exercice 27. *Nombres complexes et fonction* arctan.

1. Soit x un réel non nul et y un réel. Soit $z = x + iy$. On note $\arg(z)$ l'unique argument de z compris dans $]-\pi, \pi]$. Montrer que $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arg(z)$.
2. En déduire que $2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 28. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Préciser l'ensemble de définition et simplifier les fonctions d'expressions suivantes :*

1. $\sin(2\arctan(x))$
2. $\tan(2\arctan(x))$
3. $\cos(\arctan(x))$
4. $\sin(\arctan(x))$
5. $\tan\left(\frac{1}{2}\arctan(x)\right)$
6. $\tan(\arccos(x))$
7. $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ (On pourra faire le changement de variable $x = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.)
8. $\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$ (On pourra faire le changement de variable $x = \cos(t)$.)

Exercice 29. *Résoudre les équations suivantes :*

1. $\arcsin(x) = 2\arctan(x)$
2. $\arctan(x) + \arctan(x^3) = \frac{3\pi}{4}$
3. $\arccos(x) = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$
4. $\arcsin(\tan(x)) = x$
5. $\arccos(x) = \arcsin(1-x)$
6. $\arctan(x) + \arctan(3x) = \frac{\pi}{4}$
7. $\arctan(x-1) + \arctan(x)$
   $+ \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}$