Géométrie élémentaire dans le plan

On considère un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'un plan $\mathcal{P}$.

Exercice 1. *(Changement de repère)*

Soit $\mathcal{R}' = (O', \vec{\imath}', \vec{\jmath}')$ un repère du plan $\mathcal{P}$. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ les coordonnées respectives de O', $\vec{\imath}'$ et $\vec{\jmath}'$ dans le repère $\mathcal{R}$.
Soit P un point du plan. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ les coordonnées du point P dans les repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.

1. Exprimer x et y en fonction de x' et de y'.
2. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.

Exercice 2. *Coordonnées et triangles*

Soit ABC un triangle non plat. Trouver l'ensemble des points M du plan qui ont les mêmes coordonnées dans les repères $\mathcal{R}_A = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $\mathcal{R}_B = (B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

Exercice 3. *Dans chacun des cas, transformer l'équation cartésienne pour $M(x, y)$ dans le repère $\mathcal{R}$ dans le repère $\mathcal{R}' = (O', \vec{\imath}', \vec{\jmath}')$.*

1. $x^2 - y^2 + 2xy = 0$, $O'(2, 3)$, $\vec{\imath}'(1, 2)$ et $\vec{\jmath}'(2, 1)$.
2. $x^2 + y^2 + 4x + 3y = 0$, $O'(0, 0)$, $\vec{\imath}'(\cos(\theta), \sin(\theta))$ et $\vec{\jmath}'(-\sin(\theta), \cos(\theta))$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. *Opérations élémentaires sur les colonnes*

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et λ un réel. On rappelle que $\mathrm{Det}(\vec{u} + \lambda\vec{v}, \vec{v}) = \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v} + \lambda\vec{u}) = \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v})$.

1. Calculer la valeur de $\begin{vmatrix} x + x'^2 & x' \\ y + x'y' & y' \end{vmatrix}$ où $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$.
2. Calculer la valeur de $\begin{vmatrix} x + x'y' + x^2y' & x' + x^2 \\ y + y'^2 + xyy' & y' + xy \end{vmatrix}$ où $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 5. *Déterminer l'aire d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon R.*

Exercice 6. *Dans chacun des cas suivants, donner une équation de la droite D.*

1. D est la droite (AB) où $A(3, 5)$ et $B(-6, 2)$.
2. D est la droite passant par $A(4, 5)$ de vecteur directeur $\vec{u}(2, 1)$.
3. D est la droite passant par $A(2, 1)$ orthogonale au vecteur $\vec{u}(-2, 1)$.
4. D est la droite passant par $A(-2, 1)$ parallèle à D' la droite d'équation $3x + 2y - 4 = 0$.
5. D est la droite passant par $A(3, -1)$ orthogonale à D' la droite d'équation $2x + y - 1 = 0$.
6. D est la médiatrice de $[AB]$ où $A(1, 2)$ et $B(3, -2)$.

Exercice 7. *Distance à une droite*

Soient $A(1, 2)$, $B(3, 4)$, $\vec{u}(-1, 2)$, $C(-1, -3)$ et (D) une droite.
Calculer dans chacun des cas suivants la distance $d(C, (D))$.

1. (D) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
2. (D) est la droite passant par A et orthogonal à $\vec{u}$.
3. (D) est la droite (AB).

Exercice 8. *Distance à une droite et équation cartésienne*

Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $4x + 5y - 3 = 0$ et $B(1, 2)$.
Déterminer la distance entre B et $\mathcal{D}$.

Exercice 9. *Projeté orthogonal*

Soient $\mathcal{D}$ une droite, A un point de $\mathcal{D}$, B un point de $\mathcal{P}$ et H le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$.

1. Soient $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
   Exprimer $\overrightarrow{AH}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$.
2. **Application :** On suppose $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ et $\vec{u}(1, 2)$.
   Déterminer les coordonnées de H.
3. Soient $\vec{v}$ un vecteur non nul orthogonal à $\mathcal{D}$.
   Exprimer $\overrightarrow{AH}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}$.
4. **Application :** On suppose $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ et $\vec{v}(1, 2)$.
   Déterminer les coordonnées de H.
5. **Application :** On suppose $B(2, 3)$ et que la droite $\mathcal{D}$ a pour équation $3x + 2y + 1 = 0$.
   Déterminer les coordonnées de H.

Exercice 10. *Lignes de niveaux*

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul.

1. Trouver une fonction dont les lignes de niveaux sont les droites dont le vecteur directeur est $\vec{u}$.
2. Trouver une fonction dont les lignes de niveaux sont les droites perpendiculaires à $\vec{u}$.

Exercice 11. *Transformer les équations cartésiennes suivantes en équations polaires équivalentes.*

1. $x^2 + y^2 - 1 = 0$
2. $xy = 0$
3. $x^2 - y^2 = 0$
4. $x^2 + 2xy - y^2$
5. $3yx^2 - y^3$
6. $x^3 + y^3 - 3xy^2 - 3x^2y$

Exercice 12. *Équation polaire d'une droite*

1. Soit $\mathcal{D}_1$ une droite passant par l'origine. Déterminer une équation polaire de $\mathcal{D}_1$.
2. Soient $\mathcal{D}_2$ une droite ne passant pas par l'origine et H le projeté orthogonal de O sur $\mathcal{D}_2$. A l'aide de coordonnées polaires de H, déterminer une équation polaire de $\mathcal{D}_2$.

Exercice 13. *Cercles*

Soient $\mathcal{C}_1$ le cercle de centre $\Omega_1(1,0)$ et de rayon 1 et $\mathcal{C}_2$ le cercle de centre $\Omega_2(0,2)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ s'intersectent en deux points A et B.
2. Donner une équation de la droite (AB).
3. Donner l'équation générale d'un cercle passant par les points A et B.

(Indication : Il n'est pas utile de calculer les coordonnées de A et B.)

Exercice 14. *Équation polaire d'un cercle*

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon R dont le centre Ω admet pour coordonnées polaires $(r_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^2$.

1. Donner une équation polaire de $\mathcal{C}$.
2. On suppose de plus que $\mathcal{C}$ passe par l'origine.
   (a) Simplifier l'équation polaire de $\mathcal{C}$.
   (b) En déduire une expression en fonction des coordonnées cartésiennes de Ω.

Exercice 15. *Soit G le barycentre d'un triangle ABC. Montrer que les aires de GAB, GAC et GBC sont égales.*

Exercice 16. *Soit ABC un triangle équilatéral.*

Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = MC^2$.

Exercice 17. *Soient ABC un triangle et G le centre de gravité de ABC.*

Déterminer, à l'aide de G, l'ensemble des points M tels que :
$MA^2 + MB^2 + MC^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2$.

Exercice 18. *Triangle et droites parallèles*

Soient ABC un triangle non plat et Δ_A, Δ_B et Δ_C trois droites parallèles passant respectivement par A, B et C. On pose : $A' = \Delta_A \cap (BC)$, $B' = \Delta_B \cap (AC)$ et $C' = \Delta_C \cap (AB)$. On suppose que les points P, Q et R tels que $P = (BC) \cap (B'C')$, $Q = (AC) \cap (A'C')$ et $R = (AB) \cap (A'B')$ existent. On veut montrer que P, Q et R sont alignés.

1. (a) Montrer, par l'absurde, que $A \neq A'$.
   (b) On suppose, par l'absurde, que : A, A' et B' sont alignés.
   Montrer successivement que : $Q = A'$, $A' = C$, $\Delta_A = (AC)$ et $C' = A$ et obtenir une contradiction.
   (c) En déduire que $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AB'})$ est un repère.

   Soient $c \in \mathbb{R}$ tel que $C(0, c)$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que $B(b, 1)$.
2. Exprimer b en fonction de c.
3. En déduire les coordonnées de B et C' en fonction de c.
4. Déterminer les coordonnées de P, Q et R en fonction de c.
5. Montrer que P, Q et R sont alignés.

Exercice 19. *Triangle et droites perpendiculaires*

Soient A, B et C trois points non alignés et Δ une droite.
Soient A', B' et C' les projetés orthogonaux de A, B et C sur Δ.
En se plaçant dans un repère orthonormal bien choisi, montrer que les droites perpendiculaires à (BC), (AC) et (AB) issues respectivement des points A', B' et C' sont concourantes.

Exercice 20. *Encore un triangle*

Soit ABC un triangle non plat.
Soient D et E deux points de (AB) tels que $[AB]$ et $[DE]$ aient le même milieu, F et G deux points de (BC) tels que $[BC]$ et $[FG]$ aient le même milieu et H et I deux points de (AC) tels que $[AC]$ et $[HI]$ aient le même milieu.
Soient A', B' et C' les milieux respectifs de $[DI]$, $[EF]$ et $[GH]$.
Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles.

Exercice 21. *Hyperbole et orthocentre*

Soient $\mathcal{H}$ l'ensemble d'équation cartésienne $xy = 1$ et A, B et C trois points de $\mathcal{H}$.
Montrer que l'orthocentre de ABC est un point de $\mathcal{H}$.

Exercice 22. *Soient O et A deux points distincts.*

Déterminer le lieu des centres des cercles passant par A et dont les tangentes passant par O sont orthogonales.