Courbes paramétrées

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormée $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Exercice 1. *Mouvement circulaire*
On considère un paramétrage deux fois dérivable $M(t)$ de vitesse $\vec{v}(t)$ et d'accélération $\vec{a}(t)$. On suppose que $\|\overrightarrow{OM}(t)\|$ est constante égale à R.

1. Montrer que $\overrightarrow{OM}(t)$ et $\vec{v}(t)$ sont orthogonaux.
2. On suppose de plus que $\|\vec{v}(t)\|$ est constante égale à v_0.
   (a) Donner une relation entre $\vec{v}(t)$ et $\vec{a}(t)$.
   (b) Montrer que $\|a\|$ est constante et calculer sa valeur en fonction de R et de v_0.

Exercice 2. *Étudier les courbes de paramètre t suivantes :*

1. $\begin{cases} x(t) = t^2 + 2t \\ y(t) = t + \dfrac{1}{t} \end{cases}$
2. $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t+1}{t^3} \\ y(t) = \dfrac{t-1}{t^2} \end{cases}$
3. $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^3} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$
4. $\begin{cases} x(t) = \sin(t) + 2\cos(t) \\ y(t) = \cos(t) - 2\sin(t) \end{cases}$
5. $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{t^3 - 3t - 2} \\ y(t) = \ln(1+t^2) \end{cases}$
6. $\begin{cases} x(t) = \sqrt{t^2+2t+5} \\ y(t) = t + \dfrac{1}{t} \end{cases}$
7. $\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$
8. $\begin{cases} x(t) = \sin(t) + \sqrt{3}\cos(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$
9. $\begin{cases} x(t) = t^2\ln(t^2) \\ y(t) = t\ln(t)^2 \end{cases}$

Exercice 3. *Tangentes orthogonales*

On considère la courbe Γ de représentation paramétrique $\begin{cases} x(t) = 4t^3 \\ y(t) = 3t^4 \end{cases}$.

1. Étudier la courbe Γ.
2. On considère $\Gamma^\star$ l'ensemble des points de $\mathcal{P}$ où s'intersectent orthogonalement deux tangentes de Γ.
   (a) Donner un paramétrage de $\Gamma^\star$.
   (b) Étudier la courbe $\Gamma^\star$.

Exercice 4. *Sous-tangente et sous-normale polaire*

Soit Γ une courbe paramétrée par une équation polaire $r = \rho(\theta)$ où θ varie dans un intervalle I et ρ est une fonction dérivable sur I. On note $(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ la base polaire associée à l'angle θ.
Soit $\theta \in I$. On suppose que la tangente et la normale à Γ au point de paramètre θ intersecte la droite passant par l'origine et de vecteur directeur $\vec{v}(\theta)$ respectivement en les points T et N. La sous-tangente et la sous-normale à Γ sont respectivement $\overline{OT}$ et $\overline{ON}$ où $\overrightarrow{OT} = \overline{OT}\vec{v}(\theta)$ et $\overrightarrow{ON} = \overline{ON}\vec{v}(\theta)$.
Montrer que $\dfrac{1}{\overline{OT}} = \left(\dfrac{1}{\rho}\right)'(\theta)$ et $\overline{ON} = \rho'(\theta)$.

Exercice 5. *Vitesse aréolaire*

On considère un paramétrage polaire (ρ, θ) où ρ et θ sont des fonctions deux fois dérivables définies sur un intervalle I. On note $M(t)$ le point de coordonnées polaires $(\rho(t), \theta(t))$ où $t \in I$.
Soit $t_0 \in I$. On note $\mathcal{A}(t)$ l'aire algébrique du triangle $(OM(t_0)M(t))$.

1. Donner une expression de $\mathcal{A}$ en fonction du paramétrage M.
2. Montrer que la fonction $\mathcal{A}$ est dérivable et calculer sa dérivée.
   On appelle vitesse aréolaire (vitesse de l'aire) du paramétrage $M(t)$ la quantité $\dfrac{1}{2}\rho^2(t)\theta'(t)$.
3. Comparer la vitesse aréolaire en t_0 et $\mathcal{A}'(t_0)$.
   On suppose que le paramétrage $M(t)$ est à accélération centrée en O.
4. Montrer que la vitesse aréolaire du paramétrage $M(t)$ est constante.

Exercice 6. *Étudier les courbes d'équations polaires $r = \rho(\theta)$ dans les cas suivants :*

1. $\rho(\theta) = 2^{\frac{\theta}{2\pi}}$
2. $\rho(\theta) = \cos(2\theta)$
3. $\rho(\theta) = 1 + \cos(3\theta)$
4. $\rho(\theta) = \sqrt{2\cos(2\theta)}$
5. $\rho(\theta) = 1 + \cos(3\theta) + \sin^2(3\theta)$
6. $\rho(\theta) = \dfrac{1}{1+\cos(\theta)}$
7. $\rho(\theta) = \dfrac{1}{1 + 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}$
8. $\rho(\theta) = 1 + 2\cos\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$
9. $\rho(\theta) = \dfrac{1}{1 + \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{3}\right)}$

Exercice 7. *Cochléoïde*

1. Tracer la courbe Γ d'équation polaire $r = \rho(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\theta}$.
2. On considère une droite D passant par O. Montrer que les tangentes à Γ aux points d'intersection de Γ et de D sont coucourantes.