Géométrie élémentaire dans l'espace

On munit un espace $\mathcal{E}$ de dimension 3 d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ direct et orthonormé.

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base ou non.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

1. $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{w} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$	4. $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$
2. $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	5. $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ b \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} b \\ a \\ b \end{pmatrix}, \vec{w} \begin{pmatrix} b \\ b \\ a \end{pmatrix}$
3. $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{w} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$	6. $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, \vec{w} \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2. Projeté orthogonal

- Vérifier que les quatre points $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $D \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{E}$ sont non coplanaires.
- Déterminer une équation cartésienne de (BCD) .
- Déterminer le projeté orthogonal H de A sur le plan (BCD) .
- En déduire $d(A, (BCD))$.

Exercice 3. Équations de droites et de plans

- Vérifier que les points $A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ne sont pas alignés.
Donner une équation cartésienne du plan qui les contient.
- Donner une équation cartésienne du plan passant par $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et normal au vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Donner un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et dirigée par } \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

4. Trouver une représentation paramétrique de la droite définie par :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ x + y - 4z - 6 = 0 \end{cases}$$

5. On considère le plan P d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda + 2\mu \\ y = 2 + 2\lambda + \mu \\ z = 1 - \lambda - \mu \end{cases}.$$

et le plan P' d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 1 + 3u - v \\ y = 3 + 3u + v \\ z = 1 - 2u \end{cases}.$$

Montrer que $P = P'$.

6. Soit D la droite représentée paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}.$$

Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant la droite D et le point

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

7. Donner un vecteur directeur de la droite $(ABC) \cap (ADE)$ où $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$

$$B \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, D \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } E \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Droites sécantes

Soient a et b deux réels. Soit D la droite d'équation $\begin{cases} x - z - a = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$

Soit D' la droite d'équation $\begin{cases} x + 2y + 1 - 2b = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$

- Montrer que D et D' ne sont pas parallèles.
- Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que D et D' soient sécantes.

3. Donner alors une équation du plan engendré par D et D' .

Exercice 5. Droites coplanaires

On se donne $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha_1, \beta_1$ et γ_1 six nombres réels non nuls.

Soit D_0 la droite d'équation : $\frac{x-x_0}{\alpha_0} = \frac{y-y_0}{\beta_0} = \frac{z-z_0}{\gamma_0}$.

Soit D_1 la droite d'équation : $\frac{x-x_1}{\alpha_1} = \frac{y-y_1}{\beta_1} = \frac{z-z_1}{\gamma_1}$.

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que D_0 et D_1 soient coplanaires.

Exercice 6. Paraboloïde hyperbolique

Soient D la droite d'équation $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ et D' la droite d'équation $\begin{cases} y=0 \\ z=1 \end{cases}$.

Soit E l'ensemble des points équidistants de D et de D' .

1. Trouver une équation cartésienne pour E .
2. Représenter graphiquement l'intersection de E avec les plans engendrés par les axes.
3. Montrer qu'en tout point de E passe au moins une droite incluse dans E .

Exercice 7. Droite perpendiculaire commune à deux droites

Soit D_1 la droite passant par $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit D_2 la

droite passant par $B \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Déterminer la droite perpendiculaire aux droites D_1 et D_2 .

Exercice 8. Une famille de plans

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère le plan P_α d'équation

$$3(\alpha^2 - 1)x + 4(1 - \alpha^2)y + 10\alpha z + 10(2\alpha - 1) = 0 \quad (E_\alpha)$$

1. Montrer que les plans P_α sont bien définis.
2. Soit $(m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $m_1 \neq m_2$.
 - (a) A quelles conditions les plans P_{m_1} et P_{m_2} sont-ils parallèles ?
 - (b) A quelles conditions les plans P_{m_1} et P_{m_2} sont-ils orthogonaux ?
3. A quelles conditions le plan P_m est-il tangent à la sphère de centre O et de rayon 1 ?

Exercice 9. Plans, droites et sphère

On se place dans l'espace usuel muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On note :

- $\mathcal{D}$ la droite d'équations : $\begin{cases} y = z \\ x = 1 \end{cases}$.
- $\mathcal{D}'$ la droite passant par O et dirigée par $a = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
- $\mathcal{Q}$ le plan d'équation $y + z = 0$.
- Pour $m \in \mathbb{R}$, $\mathcal{P}_m$ désigne le plan d'équation $x + my - mz = 1$.

1. Vérifier que tous les plans $\mathcal{P}_m$ contiennent la droite $\mathcal{D}$.
2. Soit $m \in \mathbb{R}$. Donner un vecteur normal $\vec{n}_m$ du plan $\mathcal{P}_m$.
3. Calculer les coordonnées de $\vec{r}_m = \vec{n}_m \wedge \vec{a}$.
En déduire que $\mathcal{D}'$ n'est pas orthogonale à $\mathcal{P}_m$.
4. On rappelle la définition suivante : deux plans sont dits perpendiculaires si ils ont des vecteurs normaux orthogonaux entre eux.
On appelle alors $\mathcal{R}_m$ l'unique plan contenant $\mathcal{D}'$ et perpendiculaire à $\mathcal{P}_m$.
Obtenir une équation cartésienne de $\mathcal{R}_m$.
5. Prouver que, pour tout réel m , l'intersection des plans $\mathcal{P}_m$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}_m$ est réduite à un point I_m dont on calculera les coordonnées en fonction de m .
6. On note S l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = x$.
Préciser la nature géométrique de S , ainsi que ses éléments caractéristiques.
7. Vérifier que I_m appartient à S , puis que I_m appartient à un cercle $\mathcal{C}$ (indépendant de m) dont on donnera les caractéristiques.

Exercice 10. Un des principes de fonctionnement d'un GPS

On assimile la terre à une sphère de centre O et de rayon 3. Trois satellites A_1, A_2 et A_3 ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. On se donne M un point sur la terre.

1. Le système GPS mesure que la distance MA_1 vaut 1.
Montrer que M est sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon ainsi que l'équation de son plan.
2. Le système GPS mesure que la distance MA_2 vaut 1.
 - (a) Montrer que M est situé sur une droite dont on donnera les équations cartésiennes.
 - (b) Déterminer une équation paramétrique de la droite.
 - (c) En déduire deux choix possibles pour les coordonnées de M .
3. Le système GPS mesure que la distance MA_3 vaut 2.
En déduire la position de M .