Comparaisons de fonctions

Exercice 1. *Quelques résultats classiques*

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et a un élément de I ou une extrémité de I. Montrer les résultats suivants :

1. $f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{O}}(g(x)) \Longleftrightarrow |f(x)| = \underset{x\to a}{\mathrm{O}}(|g(x)|)$
2. $f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x)) \Longleftrightarrow |f(x)| = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(|g(x)|)$
3. $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Longrightarrow |f(x)| \underset{x\to a}{\sim} |g(x)|$
4. $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Longrightarrow f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{O}}(g(x))$

Exercice 2. *Exponentielle*

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et a un élément de I ou une extrémité de I.

1. Montrer : $\mathrm{e}^{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} \mathrm{e}^{g(x)} \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x) - g(x) = 0$.
2. Comparer les fonctions e^{x^2}, e^{x^2-x} et e^{x^2+x}.
3. En s'inspirant de la question **??**, trouver une condition nécessaire et suffisante sur f et g pour que : $\mathrm{e}^{f(x)} = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\left(\mathrm{e}^{g(x)}\right)$.
4. Même question pour : $\mathrm{e}^{f(x)} = \underset{x\to a}{\mathrm{O}}\left(\mathrm{e}^{g(x)}\right)$.

Exercice 3. *Simplifier :*

1. $\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(5x)$
2. $\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \ln(x)\right)$
3. $\underset{x\to 0^+}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \ln(x)\right)$
4. $\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(x + x^2 + \ln(x)\right)$
5. $\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{x^3}\right)$
6. $\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x + x^2\right)$
7. $\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\right)$
8. $\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(x + x^2\right)$
9. $\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\right)$
10. $\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(x^2\right) + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}(x)$
11. $\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^2\right) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)$
12. $\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}(x) + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(x^2\right) + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}(\ln(x)) + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\mathrm{e}^x\right)$
13. $\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x) - \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)$
14. $\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}(x) - \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(x^2\right)$

Exercice 4. *Logarithme*

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et a un élément de I ou une extrémité de I.

1. Montrer que si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow a} g(x) = L$ avec $L > 0$ et $L \neq 1$, alors $\ln(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} \ln(g(x))$. (On traitera également le cas : $L = +\infty$.)
2. (a) Montrer que $1 + x \underset{x\to 0}{\sim} 1 + x^2$.

   (b) Déterminer un équivalent simple de $\ln(1+x)$ et de $\ln(1+x^2)$ en 0.

   (c) Que dire de $\ln(1+x)$ et $\ln(1+x^2)$?
3. On rappelle que : $\mathrm{Argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. Trouver un équivalent simple de $\mathrm{Argsh}(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 5. *Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = \sin(x)\tan(x)$ en 0
2. $f(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{\mathrm{e}^x - 1}$ en 0
3. $f(x) = \ln(1+x^2)$ en 0
4. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1}$ en 0
5. $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)$ en 0
6. $f(x) = \tan^3(x)(\cos(x)^{x^2} - 1)$ en 0
7. $f(x) = \arccos\left(\dfrac{x^3+1}{x^3+2}\right)$ en 0.
8. $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{\sin(x)}$ en π
9. $f(x) = \dfrac{\sin(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\mathrm{e}^x - 1}$ en $\dfrac{\pi}{4}$
10. $f(x) = \dfrac{\sin(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}}$ en $\dfrac{\pi}{4}$
11. $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^3}\right)$ en $+\infty$
12. $f(x) = \ln(1+x^2)$ en $+\infty$
13. $f(x) = \dfrac{\ln(x+1) - \ln(x)}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$ en $+\infty$ et en 0^+

Exercice 6. *Déterminer, si elles existent, les limites en 0 des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x\tan(x)}$
2. $f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{\sin(x)}$
3. $f(x) = \dfrac{x\sin x}{1-\cos(x)}$
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\ln(1+x)}$
5. $f(x) = \dfrac{\exp\left(\sqrt{1+\sin(x)}\right)-e}{\tan(x)}$
6. $f(x) = x^{(x^x)}$, $g(x) = (x^x)^x$
7. $f(x) = \dfrac{x\ln^4(x)}{\tan(\sqrt{x})}$
8. $f(x) = \dfrac{\exp(\frac{1}{\ln(x)})-1}{x}$
9. $f(x) = \dfrac{\sin(2x)-\sin(x)}{\tan^2(x)}$
10. $f(x) = \dfrac{\sqrt{\cos(x)}-1}{\exp(x^2)-1}$
11. $f(x) = \dfrac{\sqrt[5]{1+3x}-\sqrt[6]{1+4x}}{\sin(x)}$
12. $f(x) = (\sin(x))^{\tan(x)}$
13. $f(x) = \dfrac{2\tan(x)+\sin(x)}{x^\alpha}$
14. $f(x) = (\cos(x))^{\left(\frac{1}{\sin^2(x)}\right)}$
15. $f(x) = \left(\dfrac{\alpha+x}{x}\right)^x$
16. $f(x) = \dfrac{\ln(\cos x)}{1-\cos(2x)}$
17. $f(x) = \dfrac{\ln(\cos(x))\ln(\sin(x))}{\sin(\tan(x))}$
18. $f(x) = |\ln(x)|^x$
19. $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{\cos(x)}}{x^2}$
20. $f(x) = \left(\dfrac{\sin(2x)}{x}\right)^{1+x}$
21. $f(x) = \dfrac{\exp(\alpha x)-\exp(\beta x)}{x}$ où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $\alpha\neq\beta$
22. $f(x) = \dfrac{\ln(\cos(x))}{x^2}$
23. $f(x) = \dfrac{\cos(\alpha x)-\cos(\beta x)}{x^2}$ où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $\alpha\neq\beta$
24. $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$
25. $f(x) = (\sin(x)+\cos(x))^{\frac{1}{x}}$
26. $f(x) = \dfrac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))}$
27. $f(x) = (\cos(x))^{\frac{1}{x^m}}$, $m\in\mathbb{N}$

Exercice 7. *Fonction réciproque*

Soit f une fonction continue et croissante définie sur $\mathbb{R}^+$ telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{4}$. Montrer que f admet une fonction réciproque notée f^{-1} telle que $f^{-1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{x}$.

Exercice 8. *Fonction tangente*

1. Donner un équivalent simple de $\tan(x)$ en $\dfrac{\pi}{2}$.
2. En déduire un équivalent simple de $\arctan(x)-\dfrac{\pi}{2}$ en $+\infty$.

Exercice 9. *Équivalents de fonctions trigonométriques réciproques*

1. Montrer que $\arccos(x) \underset{x\to1^-}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$.
2. En déduire un équivalent de $\arccos(1-x)$ en 0^+.
3. Donner une équivalent de $f(x) = \arccos\left(\dfrac{x^3+1}{x^3+2}\right)$ en $+\infty$.
4. De même, déterminer un équivalent de $\mathrm{Argch}(1+x)$ en 0^+.

Exercice 10. *Calculer, si elle existe, $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x)$ dans les cas suivants :*

1. $f(x) = \left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\tan(2x)$, $a=\dfrac{\pi}{4}$
2. $f(x) = \tan(x)^{\cos(x)}$, $a=\dfrac{\pi}{2}$
3. $f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)}$, $a=1$
4. $f(x) = \dfrac{\tan(\pi x)}{x+2}$, $a=-2$
5. $f(x) = \dfrac{1-2\cos(x)}{\pi-3x}$, $a=\dfrac{\pi}{3}$
6. $f(x) = (1-x)\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$, $a=1$
7. $f(x) = x(\alpha^{\frac{1}{x}}-1)$, $a=+\infty$ où $\alpha>0$
8. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^m-1}$, $a=1$
9. $f(x) = \dfrac{\sin^2(x)-\sin^2(\alpha)}{x^2-\alpha^2}$, $a=\alpha$
10. $f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\ln(x)}$, $a=1$
11. $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2+2x-1}{x^3-x^2+x-1}$, $a=1$
12. $f(x) = \dfrac{\ln\left(\dfrac{2x}{\pi}\right)}{\cos(x)}$, $a=\dfrac{\pi}{2}$
13. $f(x) = (\ln(x))^{\tan\left(\frac{\pi x}{2e}\right)}$, $a=e$
14. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln(x)-1}$, $a=e$
15. $f(x) = \left(\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^{\tan(x)}$, $a=\dfrac{\pi}{2}$
16. $f(x) = (1+\ln(x))^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$, $a=1$
17. $f(x) = \dfrac{x(\sqrt{x^4+1}-\sqrt{x^4-1})}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$, $a=+\infty$
18. $f(x) = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$, $a=+\infty$
19. $f(x) = (\ln(x)-1)\ln(x-e)$, $a=e$
20. $f(x) = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\sqrt{\dfrac{x+1}{x^3}}$, $a=+\infty$

Exercice 11. *Étude d'asymptote*

Soit f la fonction d'expression : $f(x) = \dfrac{x\mathrm{sh}(x)+e^x}{\mathrm{ch}(x)+1}$.

1. Déterminer la limite $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = a$.
2. Déterminer la limite $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)-ax = b$.
3. Déterminer le signe de $f(x)-(ax+b)$ au voisinage de $+\infty$.