Nombres entiers

Exercice 1. Inégalités géométriques

On considère une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 \geq 0$. On suppose qu'il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^+)^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \alpha u_n \leq u_{n+1} \leq \beta u_n$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \alpha^n u_0 \leq u_n \leq \beta^n u_0$.

Exercice 2. Sommes télescopiques

Soit $(a_k)_{k=1}^{n+1} \in \mathbb{C}^{n+1}$. On pose : $S = \sum_{k=1}^n a_{k+1} - a_k$.

1. À l'aide d'une récurrence, démontrer que : $S = a_{n+1} - a_1$.
2. Retrouver ce résultat sans utiliser de récurrence.

Exercice 3. Applications de l'exercice 2

On se propose d'utiliser l'exercice 2 pour calculer des sommes.

1. Démontrer les formules suivantes :

$$(a) \sum_{k=1}^n k!k = (n+1)! - 1.$$

$$(b) \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

2. (a) Déterminer a, b et c tels que : $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$.

$$(b) \text{ En déduire : } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

3. En s'inspirant des calculs précédents, calculer : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 4. Autres applications de l'exercice 2

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. On note : $S_p = \sum_{k=0}^n k^p$.

1. Rappeler les expressions de S_0 et de S_1 en fonction de n .
2. Montrer, par récurrence sur n , que : $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. (a) Calculer de deux manières différentes : $\sum_{k=0}^n (k+1)^3 - k^3$.

(b) Retrouver l'expression de S_2 précédente.

4. En s'inspirant de la question précédente, calculer S_3 .

Exercice 5. Quelques sommes

Montrer, par récurrence, les formules suivantes :

$$1. \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(2k+1)^3}{(2k+1)^4 + 4} = (-1)^n \frac{n+1}{4(n+1)^2 + 1}.$$

$$2. \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin(2^k x)} = \frac{1}{\tan(x)} - \frac{1}{\tan(2^n x)}.$$

Exercice 6. Des suites récurrentes

Après avoir dresser le tableau de variations de f , établir l'existence des suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

dans les cas suivants :

(On pourra préciser un intervalle dans lequel varie la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.)

1. $\alpha = 0, f(x) = \frac{3x+1}{2x+1}$
2. $\alpha > 0, f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{3}{x} \right)$
3. $\alpha > 0, f(x) = \frac{x}{1+ax}$ où $a > 0$
4. $\alpha = 1, f(x) = \sqrt{(x+1)^2 + 4} - 2$
5. $\alpha = e, f(x) = \frac{x}{\ln(x)+1}$

Exercice 7. Une suite récurrente

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par : $\forall n \in \mathbb{N} u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

1. On suppose $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$. Déterminer une expression de u_n en fonction de n .
2. On suppose $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. Montrer que $u_n = 3^n - 2^n$.

Exercice 8. Suites récurrentes

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes définie par :

$$\begin{cases} u_0 = x_0 \in \mathbb{C} \\ u_1 = x_1 \in \mathbb{C} \\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$$

où a et b sont deux nombres complexes.

On pose alors : $\chi(X) = X^2 - aX - b$.

On note r_1 et r_2 les deux racines de χ (si χ admet une racine double alors $r_1 = r_2$).

1. Justifier proprement que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
2. (a) Montrer que, si $x_0 = \alpha + \beta$ et $x_1 = \alpha r_1 + \beta r_2$, alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$.
(b) On suppose $r_1 \neq r_2$.
Déterminer α et β en fonction de x_0 , x_1 , r_1 et r_2 tels que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$.
3. On suppose $r_1 = r_2 = r \neq 0$.
(a) Exprimer a et b en fonction de r .
(b) Montrer que si $x_0 = \alpha$ et $x_1 = (\alpha + \beta)r$, alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (\alpha + \beta n)r^n$.
(c) Déterminer α et β en fonction de x_0 , x_1 et r tels que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (\alpha + \beta n)r^n$.
4. Application :
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 9. Une inégalité

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2k+1}\right) > \sqrt{2n+3}$.

Exercice 10. Double sommation et produit de deux sommes

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Calculer $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n f(i) - f(j) \right)$.
2. Soit $(a_i)_{i=1}^n$ et $(b_j)_{j=1}^m$ deux familles de nombres complexes. On note : $S = \sum_{i=1}^n a_i$
et $S' = \sum_{j=1}^m b_j$. Montrer que $SS' = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j$.

Exercice 11. Quelques sommes

Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} (-1)^k$
2. $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$
3. $\sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$
4. $\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$

Exercice 12. Formule du crible de Poincaré à l'ordre 3.

Soient A_1 , A_2 et A_3 trois ensembles finis.

Déterminer le cardinal de $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ en fonction de ceux de A_1 , A_2 , A_3 , $A_1 \cap A_2$, $A_2 \cap A_3$, $A_1 \cap A_3$ et $A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

Exercice 13. Dénombrement d'ensemble.

Soit E un ensemble à n éléments.

1. Combien y a-t-il de couples de parties de E d'intersection vide ?
2. Combien y a-t-il de couples de parties de E dont la réunion est E ?
3. Combien y a-t-il de triplets de parties de E dont la réunion est E ?

Exercice 14. Dénombrements d'ensemble.

Démontrer, à l'aide d'une interprétation en terme de dénombrement, que : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exercice 15. Deux sommes.

Soient p et n deux entiers.

1. Soit $k \in [0, n]$.
Déterminer le nombre de sous-ensembles de $[1, n+p+1]$ de cardinal $p+1$ dont le plus grand élément est $p+k+1$.
2. En déduire $\sum_{k=0}^n \binom{p+k}{p}$ et $\sum_{k=0}^n \binom{p+k}{k}$.